*Notas de Clase - Dise˜no de Experimentos Partes I, II y III del curso 3007340*

*Nelfi Gonz ´alez Alvarez*

*Doctora en Ciencias Estadısticas ´*

*Profesora Asociada Escuela de Estadıstica ´*

*Universidad Nacional de Colombia Sede Medellın´*

**

*2021*

´Indice general

Lista de Abreviaturas XI

I INTRODUCCION AL DOE - DISE ´ NOS COMPLETAMENTE ALEATOR- ˜ IZADOS CON UN SOLO FACTOR DE TRATAMIENTOS 1 ´

1. Introduccion al dise ´ no de experimentos 3 ˜ 1.1. Clasificaci ´on de los problemas experimentales . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.1.1. Comparaci ´on de tratamientos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.1.2. Depuraci ´on o selecci ´on de variables . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.1.3. Exploraci ´on de superficies de respuesta . . . . . . . . . . . . . . . 4 1.1.4. Optimizaci ´on de sistemas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1.1.5. Robustificaci ´on de sistemas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2. Aproximaci ´on sistem ´atica a la planeaci ´on e implementaci ´on de experi mentos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1.2.1. Establecer el objetivo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1.2.2. Elegir la respuesta . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 1.2.3. Elegir factores y niveles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8 1.2.4. Elegir el plan experimental . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2.5. Ejecutar el experimento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11 1.2.6. Analizar los datos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12 1.2.7. Extraer conclusiones y hacer recomendaciones . . . . . . . . . . . 12 1.3. Contenido del plan experimental . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

III

IV ´INDICE GENERAL

1.4. Los tres principios fundamentales de la experimentaci ´on . . . . . . . . . 15 1.5. Estructura de un dise ˜no experimental . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21 1.5.1. Estructura de tratamientos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22 1.5.2. Estructura de dise ˜no . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 1.6. Clasificaci ´on de los dise ˜nos experimentales . . . . . . . . . . . . . . . . . 25 1.7. La investigaci ´on experimental vs. DOE . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27 1.8. Consideraciones pr ´acticas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27 1.9. Qu ´e se hace despu ´es del primer experimento . . . . . . . . . . . . . . . . 28 1.10.Qu ´e hacer cuando ning ´un efecto es significativo . . . . . . . . . . . . . . 31 1.11.Ejemplos de DOE . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32 1.11.1.Efectos de cinco dietas sobre la p ´erdida de peso . . . . . . . . . . 32

1.11.2.Resistencia de cuatro pinturas de uso dom ´estico a condiciones ambientales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35 1.11.3.Protecci ´on del acero contra el calor . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38 1.11.4.Efectos de los niveles de nitr ´ogeno (N) y de potasio (K) sobre una variedad de ma´ız . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41 1.11.5.Bloques y replicaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

2. Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE 45 2.1. Supuestos b ´asicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45 2.2. Usos del an ´alisis de varianza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46 2.3. Modelo de an ´alisis de varianza o ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

2.3.1. Relaci ´on entre regresi ´on y an ´alisis de varianza . . . . . . . . . . . 46 2.3.2. Elecci ´on entre regresi ´on y ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48 2.3.3. Modelo lineal de la variable respuesta relativo a modelos ANOVA . 49 2.3.4. Modelo ANOVA I (efectos fijos) vs. Modelo ANOVA II (efectos aleato

rios) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3. Experimentos con un solo factor de efectos fijos 53 ´ 3.1. Introducci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

´INDICE GENERAL V

3.2. Dise ˜no completamente aleatorizado o DCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53 3.2.1. Aleatorizaci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54 3.2.2. Modelo para un dise ˜no completamente aleatorizado, un factor efec

tos fijos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58 3.2.3. Test ANOVA para un DCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61 3.2.4. Distribuciones muestrales de los estimadores . . . . . . . . . . . . 63 3.2.5. Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 3.2.6. Ejemplo: Mejora de la productividad (tomado de [7]) . . . . . . . . 67 3.2.7. Ejemplo: Efectos de un fertilizante (tomado de [6] ) . . . . . . . . . 74

4. Inferencias para medias de tratamientos con un factor 83 4.1. Comparaciones de pares de medias de tratamientos - m´ınima diferencia significativa o LSD . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83 4.1.1. Ejemplo. [4] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84 4.2. Prueba de rangos m ´ultiples de Duncan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85 4.2.1. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86 4.3. M ´etodo de Tukey de comparaciones de todos los pares de medias, o rango estudentizado de Tukey . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87 4.3.1. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88 4.4. Comparaciones de tratamientos con un control - M ´etodo de Dunnet . . 89 4.5. M ´etodos de Dunnett unilaterales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89 4.6. Ejemplos de aplicaci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90 4.6.1. Con datos experimento de las lechugas . . . . . . . . . . . . . . . . 90 4.6.2. Con datos experimento sobre la mejora de la productividad . . . . 96 4.7. Comparaciones mediante contrastes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 100 4.7.1. Pruebas de hip ´otesis sobre un contraste de medias . . . . . . . . . 101 4.7.2. Ejemplo, [2] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102 4.7.3. M ´etodo de Bonferroni para comparaciones preplaneadas . . . . . 103 4.7.4. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104

VI ´INDICE GENERAL

4.7.5. M ´etodo de Scheff ´e . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105 4.7.6. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105 4.7.7. Relaci ´on entre ANOVA y el m ´etodo de Scheff ´e. . . . . . . . . . . . . 106 4.7.8. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107 4.7.9. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

5. Modelo ANOVA un solo factor efectos aleatorios 113 5.1. Modelo de un s ´olo factor de efectos aleatorios . . . . . . . . . . . . . . . . 117 5.2. Distribuci ´on de las variables de respuesta . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 5.3. An ´alisis de varianza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119 5.4. Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120

5.4.1. Estimaciones mediante el m ´etodo ANOVA . . . . . . . . . . . . . . 120 5.4.2. Estimaciones por m ´axima verosimilitud (MLE) y m ´axima verosimil itud restringida o residual (REML) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123 5.5. Chequeo de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127 5.6. Ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128

6. Potencia en ANOVA con un Factor en un DCA 135 6.1. Potencia en experimentos con un factor de efectos fijos en un DCA . . . 135 6.1.1. Tama ˜nos de muestra para alcanzar intervalos de confianza de lon gitudes especificadas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136 6.1.2. Tama ˜nos de muestra usando la potencia de la prueba ANOVA . . 138 6.2. Potencia en ANOVA un factor de efectos aleatorios en un DCA y tama ˜nos de muestra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149

II DISENOS EN BLOQUES COMPLETOS CON UN S ˜ OLO FACTOR DE ´ TRATAMIENTOS 155

7. Disenos en bloques completos aleatorizados 157 ˜ 7.1. Distinci ´on entre factores de bloque, de ruido y covariables . . . . . . . . 157

´INDICE GENERAL VII

7.2. Tama ˜no de los bloques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159 7.3. El dise ˜no de bloques completos aleatorizados o DBCA . . . . . . . . . . . 161 7.3.1. An ´alisis de dise ˜nos de bloques completos aleatorizados . . . . . . 161 7.3.2. Comparaciones m ´ultiples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164 7.3.3. Chequeo de supuestos del modelo . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165 7.3.4. Determinaci ´on del n ´umero de observaciones por tratamiento . . . 165 7.4. Dise ˜no general de bloques completos (secci ´on complementaria) . . . . . 166 7.4.1. Modelo y ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166

7.5. Efectividad en la construcci ´on de bloques: Eficiencia relativa (ER) y pre cisi ´on de un experimento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170 7.6. Ejemplo: Comparaci ´on de cuatro m ´etodos de ensamble . . . . . . . . . . 173 7.7. Problema para an ´alisis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181 7.8. Dise ˜nos en cuadrados latinos DCL . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187 7.8.1. Ejemplo [4] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 191

III DISENOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS CON TRATAMIEN- ˜ TOS FACTORIALES 201

8. Experimentos factoriales 203 8.1. Introducci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 203 8.1.1. Experimentos factoriales vs. la estrategia de mover un factor a la vez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 8.1.2. Ventajas de los dise ˜nos factoriales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204 8.2. Dise ˜nos factoriales con dos factores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 205 8.2.1. Tipos de experimentos factoriales con dos factores . . . . . . . . . 205 8.3. Modelo factorial dos factores efectos fijos con interacci ´on, en un DCA . . 206 8.3.1. Modelo ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 206 8.3.2. Par ´ametros de inter ´es . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209 8.3.3. Significado de la interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209

VIII ´INDICE GENERAL

8.3.4. Encubrimiento o enmascaramiento de efectos principales . . . . . 213 8.3.5. Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213 8.3.6. An ´alisis de varianza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 214 8.3.7. Hip ´otesis a probar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215 8.3.8. Evaluaci ´on de los efectos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217 8.3.9. Comparaciones m ´ultiples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222 8.3.10.Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224

8.4. Modelo factorial dos factores de efectos fijos sin interacci ´on, en un DCA 225 8.4.1. Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 225 8.4.2. ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 225 8.4.3. Hip ´otesis a probar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226 8.4.4. Comparaciones m ´ultiples y contrastes de medias . . . . . . . . . . 227 8.4.5. Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228

8.5. Ejemplo experimento factorial dos factores de efectos fijos en un DCA . 229 8.5.1. Modelo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230 8.5.2. An ´alisis descriptivo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230 8.5.3. ANOVA y tests de hip ´otesis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 233 8.5.4. Inferencias sobre medias de tratamientos t ´ecnico\*marca . . . . . 235 8.5.5. Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243

8.6. Modelo factorial dos factores de efectos aleatorios con interacci ´on, en un DCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247 8.6.1. Modelo ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 248 8.6.2. Par ´ametros de inter ´es . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249 8.6.3. ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249 8.6.4. Pruebas de hip ´otesis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 252 8.6.5. Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 253 8.6.6. Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 254

8.7. Modelo factorial de dos factores con efectos aleatorios sin interacci ´on en un dise ˜no DCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 254

´INDICE GENERAL IX

8.7.1. ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255 8.7.2. Hip ´otesis a probar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255 8.7.3. Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257 8.7.4. Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257

8.8. Ejemplo dos factores de efectos aleatorios en un DCA . . . . . . . . . . . 257 8.8.1. Modelo para el experimento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 258 8.8.2. An ´alisis descriptivo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 259 8.8.3. ANOVA y estimaci ´on de componentes de varianza . . . . . . . . . . 260 8.8.4. Validaci ´on de supuestos sobre los errores . . . . . . . . . . . . . . 264

8.9. Modelo factorial de dos factores con efectos mixtos con interacci ´on, en un DCA balanceado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 268 8.9.1. Modelo Mixto restringido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 269 8.9.2. Modelo mixto no restringido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 276

8.10.Modelo factorial de dos factores de efectos mixtos sin interacci ´on, en un DCA balanceado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 282 8.10.1.Par ´ametros de inter ´es . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 283 8.10.2.ANOVA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284 8.10.3.Pruebas de hip ´otesis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284 8.10.4.Estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 285 8.10.5.Contrastes de medias *μi•* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286 8.10.6.Validaci ´on de supuestos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287

8.11.Ejemplo dos factores de efectos mixtos en un DCA . . . . . . . . . . . . . 287 8.11.1.Modelo para el experimento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 288 8.11.2.An ´alisis descriptivo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 289 8.11.3.ANOVA y estimaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291 8.11.4.Validaci ´on de supuestos sobre los errores . . . . . . . . . . . . . . 298

A. Complementos 305 A.1. Funciones estimables de los par ´ametros . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 305

X ´INDICE GENERAL

A.2. Test de Bartlett de homogeneidad de varianzas . . . . . . . . . . . . . . . 305 A.3. Test de Levene de Homogeneidad de varianza . . . . . . . . . . . . . . . . 306 A.4. Test de Cochran para homogeneidad de varianza . . . . . . . . . . . . . . 308

A.4.1. Test C de Cochran . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 308 A.4.2. Test G de Cochran . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309 A.5. Transformaciones para homogeneizar varianza . . . . . . . . . . . . . . . 311 A.6. An ´alisis con varianzas desiguales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 314

A.7. Deducci ´on de los intervalos de confianza para los par ´ametros en modelo DCA un factor de efectos aleatorios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 315 A.7.1. I.C para *σ*2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 316 A.7.2. I.C para *σ*2*α* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 316

A.7.3. I.C para *σ*2*α/σ*2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 317 A.7.4. I.C para *σ*2*α/**σ*2 + *σ*2*α*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 317 A.7.5. I.C para *μ* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 318 A.8. Procedimiento Satterthwaite, [7] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 319

Bibliograf´ıa 321

Lista de Abreviaturas

*I.C* Intervalo de Confianza

*IID* Independente(s) e id ´enticamente distribuido(s) *m.a* Muestra Aleatoria

*TLC* Teorema de L´ımite Central

*v.a* Variable Aleatoria

XI

´Indice de figuras

1.1. Diagrama de flujo proceso de fabricaci ´on de pulpa de papel. Adaptado de [14]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9 1.2. Diagrama causa - efecto, experimento del moldeo por inyecci ´on. Adapta do de [14]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10 1.3. Diagrama de causa - efecto revisado, experimento del moldeo por inyec ci ´on. Adaptado de [14]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20 1.4. Diagrama de Entrada - Proceso - Salida . Adaptado de [4]. . . . . . . . . 20 1.5. Diagrama de Entrada - Proceso - Salida en la fabricaci ´on de un envase pl ´astico. Adaptado de [4]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21 1.6. Estructuras de tratamiento y de dise ˜no y su combinaci ´on en un DOE. Adaptado de [9]. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22 1.7. Procesos en la investigaci ´on experimental. Adaptado de [5]. . . . . . . . . 28

2.1. Relaci ´on entre regresi ´on y ANOVA. Adaptado de [7]. (a) Punto de vista de la regresi ´on: interesa la funci ´on que establece c ´omo cambia la media de la respuesta con los cambios en los valores del predictor lineal; (b) Punto de vista del modelo ANOVA: solo interesa que en los distintos niveles de valores del predictor lineal, existen diferentes poblaciones estad´ısticas de la respuesta que se diferencian en sus medias, pero no interesa modelar los cambios en estas medias como funci ´on de los valores del predictor lineal. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

3.1. Boxplots sobre datos en ejemplo 3.2.6. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 73 XIII

XIV ´INDICE DE FIGURAS

3.2. Residuos internamente estudentizados y su gr ´afico de probabilidad nor mal, para modelo ANOVA sobre datos en ejemplo 3.2.6. . . . . . . . . . . 73 3.3. Boxplots sobre datos en ejemplo 3.2.7. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80 3.4. Residuos internamente estudentizados y su gr ´afico de probabilidad nor mal, para modelo ANOVA sobre datos en ejemplo 3.2.7. . . . . . . . . . . 81

4.1. I.C de Tukey para las diferencias de medias de tratamiento en 3.2.7. Es resultado del uso de plot(TukeyHSD(...)); vea C ´odigo R 4.6.1. . . . . 93 4.2. I.C de Tukey para las diferencias de medias de tratamiento en 3.2.6. Es resultado del uso de plot(TukeyHSD(...)); vea C ´odigo R 4.6.3. . . . . 100

5.1. Representaci ´on del modelo ANOVA de un factor de efectos aleatorios. *∼ N* *μ, σ*2*α*. . . . . 117

Adaptado de [7]. Note que las *μi* = *μ* + *Ai*, por tanto, *μiiid*

5.2. Boxplots para los datos del experimento del contenido de lana limpia . . 131 5.3. Residuos internamente estudentizados para el experimento del contenido de lana limpia. Gr ´aficos de probabilidad normal tambi ´en sobre residuos internamente estudentizados y efectos estimados (estandarizados). . . . 132

6.1. Comportamiento de la diferencia *q*20*.*05 (5*,* 5 (*n −* 1)) *−* 0*.*9*n* vs. *n*, en la solu ci ´on del tama ˜no de muestra ´optimo seg ´un comparaciones de Tukey con un *HSDij ≤* 3 *mm*, a un nivel de significancia de 0.05 y usando *σ* 2 = 10 *mm*2 en un DCA de efectos fijos de un s ´olo factor con *a* = 5 niveles. . . 137

6.2. Comportamiento de la potencia del test ANOVA vs. *n*, en un DCA con un factor de efectos fijos, cuando se desea detectar diferencias entre medias a un nivel de significancia de 0.05, con las verdaderas medias sean iguales a *μ*1 = 15*, μ*2 = 13*, μ*3 = 19*.*5*, μ*4 = 27*.*5. . . . . . . . . . . . . 144

6.3. Comportamiento de la potencia del test ANOVA vs. *n*, en un DCA con un factor de efectos fijos con *a* = 3, cuando se desea detectar diferencias Δ = *μi − μj* = 0*.*25, entre cualesquiera dos medias, a un nivel de significancia de 0.05. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148

´INDICE DE FIGURAS XV 7.1. Boxplots tiempos de ensamble seg ´un m ´etodo y seg ´un operador . . . . . 174 7.2. Medias de tiempos de ensamble seg ´un m ´etodo y seg ´un operador . . . . . 175

7.3. I.C Tukey del 95 % de confianza, para las diferencias de medias de tratamien tos (M ´etodos de ensamble) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177

7.4. Gr ´aficos de residuales internamente estudentizados y test de Normali dad en ejemplo 7.6. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 178

7.5. Boxplots tiempos de montaje seg ´un operador y seg ´un tipo de montaje . 182 7.6. Medias de tiempos de ensamble seg ´un operador y seg ´un tipo de montaje 183 7.7. Gr ´aficas de los intervalos de confianza de Tukey . . . . . . . . . . . . . . 184 7.8. Gr ´aficas de residuos internamente estudentizados Para an ´alsis de supuestos185

7.9. Boxplots datos Ejemplo 7.8.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193

7.10.Gr ´afica de los I.C de Tukey para las diferencias entre medias del factor Marca, en ejemplo7.8.1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196

7.11.Gr ´afica de residuos internamente estudentizados y qqplot normal, en ejemplo7.8.1. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 197

8.1. Gr ´aficos de perfiles de medias. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210

8.2. (a) Perfiles de medias de tratamientos seg ´un marca. (b) perfiles de medias de tratamientos seg ´un t ´ecnico. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231

8.3. (a) Distribuciones seg ´un t ´ecnico. (b) Distribuciones seg ´un marca. . . . . 232

8.4. (a) Distribuciones de tiempos de t ´ecnicos en cada marca. (b) Distribu ciones de tiempos por marcas en cada t ´ecnico. . . . . . . . . . . . . . . . 233

XVI ´INDICE DE FIGURAS

8.5. Gr ´aficos I.C de Tukey del 95 % de confianza, para las diferencias de me dias de tratamientos. Observe que no se detectan diferencias pues el cero est ´a contenido en todos los intervalos, sinembargo, esto es debido a una gran reducci ´on de la potencia ante un n ´umero grande de compara ciones. Observe adem ´as que en muchos casos el cero est ´a muy cerca a uno de los l´ımites, y en esas circunstancias es muy probable que s´ı ex istan diferencias entre las medias de tratamientos para las cuales se observa esta situaci ´on. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238

8.6. Gr ´aficos de residuos internamente estudentizados y de probabilidad nor mal en ejemplo 8.5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244 8.7. Boxplots seg ´un factores y gr ´aficos de interacci ´on, en datos del Ejemplo 8.8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 260 8.8. Gr ´aficas para evaluaci ´on de supuestos sobre los errores, en datos del Ejemplo 8.8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 265 8.9. Boxplots seg ´un factores y gr ´aficos de interacci ´on, en datos del Ejemplo 8.11 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 290 8.10.Gr ´aficos de residuales internamente estudentizados para validar supuestos en modelo factorial mixto, en datos del Ejemplo 8.11 . . . . . . . . . . . . 299

A.1. Gr ´afico del log-verosimilitud vs. *λ* producido por funci ´on R boxCox sobre los datos del ejemplo 3.2.6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 313

´Indice de tablas

3.1. Estructuras de dise ˜no en experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos, y modelos estad´ısticos correspondientes . . . . . . . . . . . . . . . . 54 3.2. Tabla de datos experimentales de un DOE en un DCA . . . . . . . . . . . 60 3.3. Tabla ANOVA en un DCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62 3.4. Estimadores, errores est ´andar e I.C para los par ´ametros del modelo . . 63 3.5. Supuestos a evaluar y pruebas correspondientes . . . . . . . . . . . . . . 64 3.6. Algunas transformaciones de la respuestas para normalidad, con base en la distribuci ´on original . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

4.1. Tests de hip ´otesis sobre contrastes de medias de tratamientos . . . . . . 101

5.1. Tabla ANOVA en un DCA con un s ´olo factor de efectos aleatorios . . . . 119 5.2. Estimadores puntuales y por intervalos de confianza de (1 *− γ*) 100 %, . . 121

6.1. Evaluaci ´on de los tama ˜nos de muestra satisfaciendo *q*20*.*05 (5*,* 5 (*n −* 1)) *≤* 0*.*9*n*137

7.1. Tabla de datos experimentales de un DOE en un DBCA . . . . . . . . . . 161 7.2. ANOVA en un DBCA . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164 7.3. ANOVA en un DBCA con bloques de tama ˜no *k* = *sa*, sin interacci ´on

factor-bloques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 7.4. ANOVA en un DBCA con bloques de tama ˜no *k* = *sa*, con interacci ´on factor-bloques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168 7.5. Cuadrado latino 4x4 inicial (izq.); sorteo de columnas 3, 2, 4, 1 (centro); sorteo de las filas 4, 2, 1, 3 (der.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187

XVII

XVIII ´INDICE DE TABLAS 7.6. ANOVA en un DCL *r × r* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190

8.1. Tratamientos en un experimento con dos factores A y B . . . . . . . . . . 204 8.2. Tabla de datos experimentales de un DOE en un DCA balanceado, dos factores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208 8.3. Par ´ametros y sus estimadores de MCO en un dise ˜no factorial de efectos fijos con interacci ´on, en un DCA. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 214 8.4. ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos fijos con interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216 8.5. Definici ´on de efectos simples de A en cada nivel de B . . . . . . . . . . . 218 8.6. Definici ´on de efectos simples de B en cada nivel de A . . . . . . . . . . . 219 8.7. Estimadores de efectos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 220 8.8. significancia de los efectos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223 8.9. Par ´ametros y sus estimadores de MCO en un dise ˜no factorial de efectos fijos sin interacci ´on, en un DCA. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226 8.10.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos fijos sin in teracci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227 8.11.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos aleatorios con interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251 8.12.Estimaciones de las componentes y propociones de varianza en modelo factorial, dos factores de efectos aleatorios con interacci ´on . . . . . . . . 253 8.13.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos aleatorios sin interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256 8.14.Estimaciones de las componentes y propociones de varianza en modelo factorial, dos factores de efectos aleatorios sin interacci ´on . . . . . . . . 257 8.15.Estimaciones en el ejemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 264 8.16.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos Mixtos (A factor de efectos fijos y B factor de efectos aleatorios) con interacci ´on, modelo restringido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273

´INDICE DE TABLAS XIX

8.17.Estimaciones de las componentes y propociones de varianza en modelo factorial, dos factores de efectos mixtos con interacci ´on, modelo restringido275 8.18.Estimadores de efectos fijos y medias del factor A, factorial dos factores de efectos mixtos con interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275 8.19.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos Mixtos (A factor de efectos fijos y B factor de efectos aleatorios) con interacci ´on, modelo no restringido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 279 8.20.Estimaciones de las componentes y propociones de varianza en mode lo factorial, dos factores de efectos mixtos con interacci ´on, modelo no restringido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 281 8.21.ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos mixtos sin interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 285 8.22.Estimaciones de las componentes y propociones de varianza en modelo factorial, dos factores de efectos mixtos sin interacci ´on. . . . . . . . . . . 286 8.23.Estimadores de efectos fijos y medias del factor A, factorial dos factores de efectos mixtos sin interacci ´on . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286

A.1. Transformaciones de potencia *Y p* usuales. Fuente [6]. . . . . . . . . . . 312

Parte I

INTRODUCCION AL DOE - DISE ´ NOS COMPLETAMENTE ALEATORIZADOS ˜ CON UN SOLO FACTOR DE TRATAMIENTOS ´

1

Cap´ıtulo 1

Introduccion al dise ´ no de experimentos ˜

Seg ´un [14], La experimentaci ´on cubre un amplio rango de aplicaciones que permite averiguar qu ´e pasa con un resultado o respuesta cuando los ajustes sobre ciertas variables de entrada en un sistema son cambiados a prop ´osito, y b ´asicamente permite comprender y/o mejorar el sistema estudiado, el cual puede ser un producto o un proceso, bien sea de ingenier´ıa, de las ciencias, de la manufactura, de los servicios, de la administraci ´on, etc. Puede usarse tanto el an ´alisis estad´ıstico como el sentido com ´un para estudiar las relaciones entre variables de entrada y de salida, de modo que una mayor comprensi ´on de c ´omo las primeras afectan a las segundas conlleven a la mejora del sistema particular en el que se haya inmerso el problema. El dise ˜no de experimentos es un cuerpo de conocimientos y t ´ecnicas que permiten conducir de una manera efectiva y eficiente los experimentos y el an ´alisis de los datos recolectados, y hacer conexiones entre las conclusiones de los an ´alisis y los objetivos originales de la investigaci ´on.

[9] dice que el dise ˜no de experimentos se ocupa de la planeaci ´on de experimentos con el fin de obtener la m ´axima cantidad de informaci ´on de los recursos disponibles. A menudo en el dise ˜no de un experimento es necesario controlar ciertos efectos llama dos tratamientos, poblaciones, o combinaciones de tratamientos. El experimen tador generalmente tambi ´en controla la elecci ´on de las unidades experimentales a ser colocadas en grupos, llamados bloques. Un experimento t´ıpico involucra t tratamien tos (o combinaciones de tratamientos) que son comparados o cuyos efectos van a ser

3

4 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos estudiados.

1.1. Clasificacion de los problemas experimentales ´

Los problemas experimentales pueden clasificarse en cinco grandes categor´ıas de acuerdo a sus objetivos, [14]:

1.1.1. Comparacion de tratamientos ´

En este tipo de problemas interesa comparar varios tratamientos y seleccionar el o los mejores. Por ejemplo, en la comparaci ´on de seis variedades de cebada ¿ ´estas son diferentes en t ´erminos de la producci ´on y la resistencia a la sequ´ıa? Si de hecho son diferentes, ¿c ´omo difieren y cu ´ales son las mejores?

Ejemplos de tratamientos incluyen: variedades o factores en ensayos agr´ıcolas, posiciones de trabajo en estudios de ergonom´ıa, m ´etodos de instrucci ´on, tipos de m ´aquinas, proveedores, etc.

1.1.2. Depuracion o selecci ´ on de variables ´

Hay un gran n ´umero de variables o factores en un sistema pero s ´olo un n ´umero relativamente peque ˜no de ellas son importantes. Un experimento de depuraci ´on (*screen ing experiment*) puede ser conducido para identificar estas variables. Tales experi mentos tienden a ser econ ´omicos porque trabajan con pocos grados de libertad para estimar la varianza del error y los t ´erminos de alto orden como los efectos cuadr ´aticos o las interacciones entre factores. Una vez se identifican las variables importantes, se puede conducir otro experimento para estudiar con m ´as detalles los efectos de tales factores. Esta fase del estudio cae en la categor´ıa que se presenta a continuaci ´on.

1.1.3. Exploracion de superficies de respuesta ´

Una vez se ha identificado el peque ˜no n ´umero de variables m ´as importantes, es necesario explorar sus efectos sobre la respuesta. La relaci ´on entre la respuesta y estas variables es algunas veces denominada superficie de respuesta. Usualmente el experimento est ´a basado en un dise ˜no que permita estimar efectos lineales y cuadr ´aticos de las variables y algunas de las interacciones entre ´estas. Estos ex-

1.2. Aproximaci ´on sistem ´atica a la planeaci ´on e implementaci ´on de experimentos 5

perimentos tienden a ser m ´as grandes que los experimentos de depuraci ´on. Se han desarrollado tanto modelos param ´etricos como no param ´etricos, donde los ´ultimos son m ´as intensivos en t ´erminos computacionales pero m ´as flexibles en el ajuste del modelo.

1.1.4. Optimizacion de sistemas ´

En muchas investigaciones el inter ´es yace en optimizar un sistema. Por ejemplo, el rendimiento de procesamiento de una planta de ensamble o de la producci ´on de un proceso qu´ımico va a ser maximizado; la cantidad de desperdicio o el n ´umero de piezas reprocesadas en una operaci ´on de estampaci ´on va a ser minimizado; el tiempo requerido para procesar una reclamaci ´on de reembolso va a ser minimizado. Si se ha identificado una superficie de respuesta, ´esta puede ser usada para la optimizaci ´on. Sin embargo, para el prop ´osito de hallar un ´optimo no es necesario trazar la su perficie total como en la exploraci ´on de una superficie de respuesta. Una inteligente estrategia secuencial puede mover r ´apidamente al experimento a una regi ´on que con tiene los ajustes ´optimos de las variables. S ´olo dentro de esta regi ´on se justifica una exploraci ´on cuidadosa.

1.1.5. Robustificacion de sistemas ´

Adem ´as de optimizar la respuesta, es importante en mejoramiento de la calidad hacer al sistema robusto frente a la ”variaci ´on del ruido”. Esto a menudo es alcanza do eligiendo ajustes de los factores controlables en los cuales el sistema sea menos sensible a este tipo de variaci ´on. Aunque tal variaci ´on es dif´ıcil de controlar en condi ciones normales, se requiere variarla sistem ´aticamente durante la experimentaci ´on. La respuesta en el an ´alisis estad´ıstico es a menudo la varianza (o una transformaci ´on de ´esta) entre las r ´eplicas de ruido para un ajuste dado del factor de control.

1.2. Aproximacion sistem ´ atica a la planeaci ´ on e implementaci ´ on de ex- ´ perimentos

Seg ´un [9], antes de llevar a cabo un experimento es necesario dar respuesta a las siguientes preguntas:

6 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos 1. ¿Cu ´antos tratamientos van a ser estudiados?

2. ¿Cu ´antas veces se necesita observar cada tratamiento?

3. ¿Cu ´ales son las unidades experimentales?

4. ¿C ´omo se aplicar ´an los tratamientos a las unidades experimentales disponibles y luego observar las respuestas?

5. ¿Puede el dise ˜no resultante ser analizado o pueden ser hechas las compara ciones deseadas?

Las respuestas a estas preguntas no son necesariamente directas y no pueden responderse de manera general. Sin embargo, las ideas y conceptos que se presen tar ´an pueden ser ´utiles para obtener la informaci ´on necesaria para hallar las respues tas.

Las siguientes subsecciones (incluyendo los ejemplos que se presentan) son tomadas de [14], quien establece que es necesario seguir en la planeaci ´on e implementaci ´on de experimentos los pasos que se describen a continuaci ´on.

1.2.1. Establecer el objetivo

Es necesario establecer con claridad el objetivo del experimento. Todos los intere sados deber´ıan participar. Por ejemplo, para un producto manufacturado, los intere sados pueden incluir a los ingenieros de dise ˜no del producto, a los ingenieros de dise ˜no de proceso, a los ingenieros de producci ´on, a los trabajadores de la l´ınea, a los administradores, proveedores y consumidores.

1.2.2. Elegir la respuesta

La respuesta es un resultado u observaci ´on experimental. En un experimento pueden haber m ´ultiples respuestas. Varias cuestiones resultan al elegir una respues ta. Las respuestas pueden ser discretas o continuas. Las respuestas discretas pueden ser de conteo o categ ´oricas, es decir, binarias (bueno, malo) u ordinales (f ´acil, normal, dif´ıcil). Generalmente se prefieren respuestas continuas. Por ejemplo, es preferible la

1.2. Aproximaci ´on sistem ´atica a la planeaci ´on e implementaci ´on de experimentos 7

medici ´on continua de la fuerza para abrir una puerta que un juicio ordinal (f ´acil, nor mal, dif´ıcil de abrir); el registro de una caracter´ıstica continua es preferible al registro del porcentaje de que la caracter´ıstica est ´a dentro de sus especificaciones. Sin em bargo, no siempre existe el medio para realizar una medici ´on continua y es preferible usar una respuesta ordinal que no hacer el experimento. Para una medici ´on continua debe contarse con un buen sistema de medici ´on. De hecho un experimento llama do estudio G R & R (*Gauge Repeatability and Reproducibility study*) puede llevarse a cabo para asegurar un sistema de medici ´on continua. Cuando hay un solo mecan ismo de medici ´on, la variaci ´on debida al sistema de medici ´on puede ser dividido en dos tipos: la variaci ´on entre los operadores y la variaci ´on dentro de los operadores. Idealmente no deber´ıa haber variaci ´on entre operadores y la variaci ´on dentro de op erador deber´ıa ser peque ˜na. El estudio G R & R proporciona estimaciones para estas dos componentes de varianza del sistema de medici ´on.

Finalmente, la respuesta puede ser elegida para incrementar la compresi ´on de los mecanismos y de las leyes f´ısicas involucradas en el problema. Por ejemplo, en un proceso que produce barras de jab ´on con sobrepeso, el peso de la barra de jab ´on es la elecci ´on obvia para la respuesta en un experimento para mejorar el problema del sobrepeso. Examinando m ´as de cerca al proceso, hay dos subprocesos que tienen una relaci ´on directa con el peso de la barra de jab ´on: El proceso de mezcla que afecta la densidad de la barra de jab ´on y el proceso de formaci ´on que impacta las dimen siones de las barras de jab ´on. Con el fin de comprender mejor el mecanismo que causa el problema del sobrepeso, la densidad de la barra de jab ´on y sus dimensiones son elegidas como las respuestas. Aunque el peso de la barra de jab ´on no es usado como una respuesta, puede ser f ´acilmente determinada a partir de su densidad y sus dimensiones. Por tanto, no se pierde ninguna informaci ´on al estudiar la densidad y las dimensiones. Tal estudio puede revelar nueva informaci ´on sobre los subprocesos de mezcla y formaci ´on, lo cual puede conducir a la vez a una mejor comprensi ´on del problema del sobrepeso.

Las respuestas elegidas pueden ser clasificadas de acuerdo al objetivo establecido.

8 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

Se pueden considerar tres amplias categor´ıas: La nominal mejor, mientras m ´as grande mejor, mientras m ´as peque ˜na mejor.

1.2.3. Elegir factores y niveles

Un factor es una variable que es considerada en el experimento, con el fin de estudiar su efecto sobre la variable respuesta. Para esto, deben usarse al menos dos valores del factor. Estos valores son referidos como niveles del factor. *Un tratamiento* es la combinaci ´on de niveles de dos o m ´as factores. Cuando hay un solo factor sus niveles son los tratamientos.

Para el ´exito del experimento es crucial identificar los factores potencialmente im portantes en la etapa de planificaci ´on del experimento. Hay dos m ´etodos gr ´aficos para identificar factores potenciales. El primero, un diagrama de flujo del sistema o proce so es ´util para ver d ´onde los factores aparecen en un proceso de m ´ultiples etapas. En la Figura 1.1 se presenta un bosquejo aproximado de un proceso de fabricaci ´on de pulpa de papel, el cual incluye las materias primas de los proveedores y un proceso qu´ımico para hacer una mezcla la cual es pasada por un proceso mec ´anico para pro ducir la pulpa. Incluir a todos los involucrados en el proceso es muy importante para capturar una descripci ´on exacta del proceso o sistema.

El segundo diagrama es conocido como diagrama de causa - efecto y puede usarse para listar y organizar los factores potenciales que pueden impactar a la respuesta. En la Figura 1.2 se presenta un diagrama de causa efecto el cual lista los factores que se piensan afectan la calidad de un proceso de moldeo por inyecci ´on.

Generalmente los factores son clasificados en: Hombre, M ´aquina, Medici ´on, Ma terial, M ´etodo. Debido a su apariencia, los diagramas de causa - efecto tambi ´en son llamados diagramas de *espina de pescado*. Las diferentes caracter´ısticas de los fac tores necesitan ser reconocidas porque ellas pueden afectar la elecci ´on del dise ˜no experimental. Por ejemplo, un factor tal como la temperatura del horno es *dif´ıcil de cambiar*. Es decir, despu ´es de cambiar el ajuste de la temperatura, puede tomar una considerable cantidad de tiempo antes que la temperatura se estabilice en el nivel de

1.2. Aproximaci ´on sistem ´atica a la planeaci ´on e implementaci ´on de experimentos 9

ajuste.

PH inicial

Proveedores

Concentraci ´on SO2Concentraci ´on de la mezcla

Materias

primas

Temperatura

Tiempo de

tratamiento

Raz ´on

l´ıquido/madera

Fase

qu´ımica

Abertura de la

placa del refinador

Fase

mec ´anica

Pulpa

Figura 1.1: Diagrama de flujo proceso de fabricaci ´on de pulpa de papel. Adaptado de [14].

Un factor tambi ´en puede ser *dif´ıcil de ajustar* as´ı que el nivel actual usado en el experimento puede ser diferente del nivel previsto. Por ejemplo, la fuerza de impacto actual de un perdig ´on lanzado contra el parabrisas de un autom ´ovil s ´olo puede ajus tarse dentro de 3 psi de la fuerza de impacto prevista (la fuerza prevista *±*3psi). Otros factores que pueden ser dif´ıciles o imposibles de controlar son denominados *factores de ruido*. Ejemplos de factores de ruido incluyen las condiciones ambientales y de uso por parte de los consumidores En general, un factor de ruido es aqu ´el cuyos valores son dif´ıciles de controlar durante el funcionamiento normal del proceso o en condiciones de uso, dentro de esta categor´ıa pueden incluirse:

*variaci´on en par ´ametros de proceso, variaci´on en par ´ametros de producto, variaci´on ambiental, factores de carga, variaci´on por efectos de pasos previos del proceso (up stream variation), variaciones en condiciones de usos, variaci´on de unidad a unidad o espacial, variaci´on en el tiempo (en escalas cortas de tiempo como ma˜nana a tarde, d´ıas en la misma semana, o varias semanas), degradaci´on o deterioro lento de condiciones*

10 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos *o calidad en un periodo largo de tiempo.*

MAQUINA ´

Presi ´on de inyecci ´on

DEFECTOS COSMETICOS ´

Velocidad de inyecci ´on

Temperatura del molde

Temperatura del inyector

Tiempo de espera

Temperatura del tambor

Longitud de inyecci ´on del material

Limpieza del tornillo y del tambor

Limpieza de la tolva

Purga

METODO ´

MATERIAL

Pigmentaci ´on de la premezcla

Humedad

Flujo de fusi ´on

Falta de entrenamiento

Reemplazo de operadores

Operadores en turnos

HOMBRE

Figura 1.2: Diagrama causa - efecto, experimento del moldeo por inyecci ´on. Adaptado de [14].

Por otra parte, los factores pueden se cuantitativos o cualitativos. Los factores cuantitativos como temperatura, tiempo, y presi ´on toman valores sobre un rango continuo. Los factores cualitativos toman un n ´umero discreto de valores, por ejemplo los factores modo de operaci ´on, proveedor, posici ´on, l´ınea de producci ´on, etc.

Para los factores cuantitativos es necesario conocer el rango (min, max.) en el cual se puede mover el factor; aparentemente uno podr´ıa elegir cualquier n ´umero de val ores en dicho rango como niveles para el experimento. Por ejemplo, si la temperatura (en °C) est ´a en el rango de 100-200°C, uno podr´ıa elegir 130 y 160°C para un ex perimento con dos niveles, o 125, 150, y 175°C para tres niveles. Si s ´olo se espera un efecto lineal (la relaci ´on entre la respuesta y el factor es lineal), dos niveles resul-

1.2. Aproximaci ´on sistem ´atica a la planeaci ´on e implementaci ´on de experimentos 11

tan suficientes. Pero si se espera una curvatura, entonces se requieren tres o m ´as niveles del factor. En general los niveles de factores cuantitativos deben elegirse lo suficientemente separados de manera que pueda detectarse un efecto, pero no de masiado separados de modo que diferentes mecanismos f´ısicos est ´en involucrados (lo cual podr´ıa dificultar hacer modelaci ´on y predicci ´on estad´ıstica).

Hay menos flexibilidad al elegir los niveles de factores cualitativos. Suponga que hay tres m ´etodos de ensayo bajo comparaci ´on. Todos los tres deben ser incluidos como los tres niveles del factor *m´etodo de ensayo*, a menos que el investigador quiera posponer el estudio de un m ´etodo, as´ı que s ´olo dos m ´etodos son comparados es un experimento con dos niveles de este factor.

Cuando hay flexibilidad en la elecci ´on del n ´umero de niveles, la elecci ´on puede depender de la disponibilidad de planes experimentales para la combinaci ´on dada de niveles de factores. Al elegir factores y niveles, deben considerarse los costos y las restricciones pr ´acticas. Los niveles de los factores deben elegirse cumpliendo las restricciones pr ´acticas. Si una combinaci ´on de factores (por ejemplo, alta temperatura y largo periodo de tiempo en una estufa) puede conducir a resultados desastrosos ´esta deber´ıa evitarse y elegir un plan de experimentaci ´on diferente.

1.2.4. Elegir el plan experimental

Para ello debe usarse los tres principios fundamentales del dise ˜no de experimen tos (aleatorizaci ´on, replicaci ´on y bloqueo) como tambi ´en otros principios seg ´un cada modelo. La elecci ´on del plan experimental es crucial. Un dise ˜no pobre puede capturar muy poca informaci ´on que ning ´un an ´alisis puede rescatar. De otra parte, si el exper imento es bien planeado, los resultados pueden ser tan obvios que no se requieren an ´alisis sofisticados. Ver Secci ´on 1.3.

1.2.5. Ejecutar el experimento

Se recomienda el uso de una matriz de planeaci ´on. Esta matriz describe el plan experimental en t ´erminos de los valores actuales o ajustados de los factores. Por ejem plo, si el factor es presi ´on, una lista de los niveles actuales podr´ıa ser 50 o 70 psi. Para

12 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

evitar confusi ´on y eliminar problemas potenciales de correr una combinaci ´on err ´onea de niveles de los factores, cada uno de los tratamientos deber´ıa especificarse en hojas de instrucci ´on aparte para darlos al personal que ejecutar ´a el experimento. Tambi ´en vale la pena llevar a cabo una corrida de prueba para ver si habr ´an dificultades al correr el experimento, concretamente, si hay problemas con el ajuste de los factores y la medici ´on de las respuestas. Cualquier desviaci ´on del experimento planeado debe ser registrada. Por ejemplo, si hay dificultad para ajustar los factores, entonces los valores reales deber´ıan ser registrados.

1.2.6. Analizar los datos

Los datos deben ser analizados de acuerdo al dise ˜no usado en la recolecci ´on de los datos. Este an ´alisis incluye el ajuste del modelo y la validaci ´on de sus supuestos a trav ´es del an ´alisis de residuales.

1.2.7. Extraer conclusiones y hacer recomendaciones

Con base en el an ´alisis de los datos, deben presentarse conclusiones en las cu ´ales se incluyan los factores importantes y el modelo para la respuesta en t ´erminos de estos factores. Tambi ´en deben indicarse los ajustes o niveles recomendados para es tos factores. Las conclusiones deben retomar los objetivos establecidos para el experi mento. Tambi ´en es recomendable realizar un experimento confirmatorio para verificar los ajustes recomendados. Adem ´as, pueden presentarse recomendaciones tales como realizar experimentaci ´on adicional en un proceso de experimentaci ´on secuencial, es pecialmente en el caso de optimizaci ´on de un proceso.

1.3. Contenido del plan experimental

De acuerdo a [4], el informe de un plan experimental debe responder a las sigu ientes siete consideraciones de la planeaci ´on experimental.

a) Localizar un problema “importante” susceptible de abordarlo con un diseno˜ experimental:

Esto implica,

1.3. Contenido del plan experimental 13

Descripci ´on inicial del problema, su importancia y descripci ´on del proceso en el que se presenta (diagrama de flujo del proceso y localizaci ´on del problema).

Establecer c ´omo se relacionan las variables que intervienen.

Idea de cu ´ales variables respuesta son importantes.

Cu ´ales factores pueden influir.

Medir situaci ´on actual y especificar qu ´e se ha hecho para atenuar el problema. Determinar c ´omo medir el ´exito del proyecto.

b) Determinar los factores de estudio seg ´un su supuesta influencia sobre la vari able respuesta:

Diagrama Ishikawa

Lista de todas las posibles causas (factores)

Posibles causas (factores) principales

Ante muchos factores, pueden descartarse algunos usando conocimiento e in formaci ´on previa, y/o dise ˜nos factoriales fraccionados saturados.

Realizar experimentos m ´as informativos en la medida que se reduce el n ´umero de factores.

c) Decidir y resumir los niveles de prueba de cada factor: Importa la separacion´ entre niveles:

Muy juntos no permiten detectar el efecto del factor. Muy separados pueden causar problemas de operaci ´on.

Recurrir a la f´ısica del proceso para obtener condiciones de prueba realmente diferentes.

Si no se pueden fijar en forma exacta, los niveles pueden ser “rangos de variaci ´on” disjuntos cuyo centro es el “nivel te ´orico”.

14 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos Para factores cualitativos seleccionar al menos dos situaciones representativas. Ante sospecha fuerte de “curvatura” usar m ´as de dos niveles.

Si no se sabe cu ´ales niveles, hacer corridas preliminares con dos niveles (criterio de separaci ´on al menos 1*.*5*σ* entre medias).

d) Elegir variables respuesta a medir:

Las que mejor reflejen el problema en cada punto del dise ˜no.

Las que puedan resultar afectadas por cambios en los factores controlados aunque no sean parte del problema.

Verificar que se pueden medir de modo confiable: equipos y m ´etodos de medici ´on capaces de repetir y reproducir una medici ´on, con precisi ´on (error) y exactitud (calibraci ´on) necesarias. Si es necesario, repetir la medici ´on y reportar el prome dio, realizar estudio R & R.

e) Seleccionar el diseno experimental adecuado a factores y objetivos: ˜ Restricciones en la aleatorizaci ´on, o en la aplicaci ´on de ciertos tratamientos.

Determinaci ´on de replicaciones necesarias de tratamientos, tama ˜no de prueba en cada condici ´on experimental.

Proponer primer dise ˜no.

Investigar por factores de ruido o de bloqueo.

Proponer dise ˜no final incluyendo aleatorizaci ´on, replicaciones, restricciones cos tos, tiempos y objetivos.

f) Planear y organizar el trabajo experimental seg ´un diseno: ˜

Aplicar principios de “aleatorizaci ´on”, “replicaci ´on” y “bloqueo”.

Definir personas, tareas, responsabilidades, e instrucciones espec´ıficas.

1.4. Los tres principios fundamentales de la experimentaci ´on 15

Dise ˜nar hojas de trabajo: Especificar c ´omo hacer pruebas, orden de corridas, forma de medici ´on y recolecci ´on de datos.

Completar detalles log´ısticos: D´ıas, horas, materiales a usar, m ´aquinas y puestos donde se har ´an las pruebas.

Prever contingencias.

Si es posible, realizar ensayos para afinar detalles de instrucciones e imprevistos.

g) Bosquejar analisis estad´ ´ ıstico para resultados experimentales: Software,

procesamiento datos,

hip ´otesis a probar,

an ´alisis a realizar,

tipo de conclusiones o decisiones esperadas.

1.4. Los tres principios fundamentales de la experimentacion´

De acuerdo a [2, 14], hay tres principios que deben considerarse en la experi mentaci ´on: *la replicaci ´on, la aleatorizaci ´on y el bloqueo*.

Una *unidad experimental* es un t ´ermino gen ´erico que se refiere a una unidad b ´asica tal como material, animal, persona, m ´aquina o periodo de tiempo, a la cual un tratamiento es aplicado. El t ´ermino *replicaci´on* significa que cada tratamiento es aplicado a unidades experimentales que son representativas de una poblaci ´on de unidades sobre las cuales las conclusiones del experimento ser ´an aplicadas. Esto facilita la estimaci ´on de la magnitud del error experimental (es decir, de la varian za del error) contra el cual se juzgan las diferencias entre los tratamientos. Si hay *t* tratamientos y *t* unidades experimentales, puede llevarse a cabo un experimento y la media de cada tratamiento puede estimarse de los datos. Pero una estimaci ´on de la

16 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

varianza del error no puede ser obtenida a menos que algunos o todos los tratamien tos sean *replicados*. Al incrementar el n ´umero de replicaciones o r ´eplicas, disminuye la varianza de las estimaciones de los efectos de los tratamientos y proporciona m ´as potencia para detectar diferencias entre tratamientos.

Desde que una *replicaci´on* de un tratamiento es *una observaci´on independiente del tratamiento*, entonces dos replicaciones de un tratamiento deben involucrar a dos unidades experimentales, y por esto es necesario realizar una distinci ´on entre repli caciones y repeticiones. Muy a menudo los investigadores usan *muestras duplicadas o partidas* para generar dos observaciones y las llaman r ´eplicas *cuando en realidad son submuestras o medidas repetidas y no replicaciones*. Por ejemplo, dos medidas in dependientes de la altura de una persona no proporcionan un medida de la verdadera variaci ´on en las alturas de la poblaci ´on; tan s ´olo son dos submuestras o repeticiones. En general, lecturas o medidas sobre la misma unidad experimental son repeticiones mientras que lecturas cada una sobre unidades experimentales separadas son repli caciones. La varianza del error de las primeras es menor que la varianza del error de las ´ultimas puesto que lecturas repetidas s ´olo miden la variaci ´on debida a los er rores en las lecturas mientras que las ´ultimas adem ´as miden la variaci ´on de unidad a unidad. Una subestimaci ´on de la verdadera varianza del error puede resultar el la detecci ´on falsa de significancia de efectos [14].

Ejemplo [9]: Considere un experimento para comparar las habilidades de tres conservantes para inhibir el crecimiento de hongos sobre cierto tipo de torta. El panadero hace una torta con cada conservante. Despu´es de nueve d´ıas de almace namiento, se mide el n ´umero de esporas de hongos por *cm*3 de torta. El panadero quer´ıa 10 replicaciones para el an ´alisis, as´ı que dividi ´o cada torta en 10 porciones y obtuvo el conteo de esporas en cada parte. Sin embargo, esas 10 mediciones no resultaron de 10 aplicaciones independientes del conservante. La variaci ´on medi da por sus submuestras es un ´ındice de la variaci ´on dentro de la torta y no de la variaci ´on de unidad experimental a unidad experimental. Para tener 10 repli caciones, el panadero necesita batir 10 tortas con cada conservante, cada una mezclada independientemente de las dem ´as.

El principio de la *aleatorizaci´on* debe aplicarse a la asignaci ´on de las unidades

1.4. Los tres principios fundamentales de la experimentaci ´on 17

experimentales a los tratamientos, al orden en el cual los tratamientos son aplicados al desarrollar el experimento y al orden en el cual se miden las respuestas. Lo an terior proporciona protecci ´on contra variables desconocidas y que pueden impactar la respuesta. Tambi ´en se reduce la influencia no deseada del juicio subjetivo en la asignaci ´on de los tratamientos y m ´as a ´un, la aleatorizaci ´on asegura la validez de la estimaci ´on del error experimental y proporciona una base para la inferencia al analizar los experimentos [14]. Considere por ejemplo, un experimento que involucra *t* tratamientos en el cual cada uno de estos es aplicado a *r* unidades experimentales diferentes. Un modelo matem ´atico que puede usarse para describir la respuesta ob servada en la *j*- ´esima unidad experimental del *i*- ´esimo tratamiento, es, [9]:

*yij* = *μi* + *ξij i* = 1*,* 2*, . . . , t, j* = 1*,* 2*, . . . , r.* (1.1) Donde *μi* es la verdadera media desconocida de la respuesta del *i*- ´esimo tratamiento y *ξij* es un ruido resultante de la variaci ´on natural y de otras posibles fuentes de error aleatorio y no aleatorio.

De acuerdo a [9], para llevar a cabo este experimento, el experimentador debe se leccionar *rt* unidades experimentales y luego asignar aleatoriamente cada tratamiento a *r* de las unidades experimentales. *La aleatorizaci´on, la cual es muy importante, es la base para el desarrollo de la teor´ıa para un an ´alisis correcto*. Una correcta aleator izaci ´on previene la introducci ´on de sesgo sistem ´atico en el experimento. *Si no usamos la aleatorizaci´on, no podemos decir si una diferencia observada es debida a las difer encias entre los tratamientos o debida al m´etodo sistem ´atico usado para asignar los tratamientos a las unidades experimentales*.

El principio de *bloqueo* tiene que ver con el concepto de bloque. Sea *r* el n ´umero de r ´eplicas necesarias y *t* el n ´umero de tratamientos. En la mayor´ıa de los experimentos es imposible seleccionar *rt* unidades experimentales id ´enticas. La no similaridad entre las unidades experimentales contribuye al ruido *ξij* . As´ı, los experimentos pueden ser mejorados si agrupamos las unidades experimentales dentro de grupos de unidades cercanamente similares, llamadas unidades *homog´eneas*. Un bloque es un grupo de

18 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

unidades homog ´eneas, por ejemplo, d´ıas de la semana, semanas, ma ˜nana vs. tarde, lotes, parcelas, entre otros. Para que el bloqueo sea efectivo, las unidades experi mentales deber´ıan ser organizadas de manera que la variaci ´on dentro de bloque sea mucho m ´as peque ˜na que la variaci ´on entre bloques. Seg ´un [9], como el objetivo de un experimento es comparar las respuestas observadas de los tratamientos sobre las unidades experimentales, mientras m ´as parecidas sean las unidades experimentales, mejor ser ´an las comparaciones entre los tratamientos. Al comparar los tratamientos dentro del mismo bloque, los efectos de bloques son separados en la comparaci ´on de los efectos de tratamientos, haciendo de tal modo el experimento m ´as eficiente y per mitiendo medir sin sesgos los efectos de los tratamientos. Por ejemplo, puede haber un efecto conocido del d´ıa sobre la respuesta de manera que si todos los tratamientos pueden ser aplicados en el mismo d´ıa, la variaci ´on de d´ıa a d´ıa es eliminada [14]. Se debe tener en cuenta que cuando se desean hacer inferencias de gran alcance, las condiciones experimentales deber´ıan ser bastante variadas, sin embargo esto puede resultar en un incremento en la variabilidad de la respuesta y por tanto se hace nece saria la aplicaci ´on de la t ´ecnica de bloqueo [2]. Si el bloqueo es efectivo, deber´ıa apli carse para remover la variaci ´on de bloque a bloque. La aleatorizaci ´on puede ser luego aplicada en la asignaci ´on de los tratamientos a las unidades dentro de cada bloque para reducir m ´as la influencia de variables desconocidas [14]. En general, cuando el bloqueo es bien realizado, las comparaciones de dos o m ´as tratamientos resultan m ´as precisas que aquellas comparaciones realizadas a partir de un dise ˜no sin bloqueo [2].

Para entender c ´omo la inclusi ´on de bloques afecta en el dise ˜no, considere *r* blo ques con *t* unidades experimentales, cada tratamiento ocurriendo en cada bloque. Un modelo que representa la respuesta observada del *i*- ´esimo tratamiento en el *j*- ´esimo bloque es:

*yij* = *μi* + *bj* + *ξ∗ij i* = 1*,* 2*, . . . , t, j* = 1*,* 2*, . . . , r.* (1.2) Comparando las ecuaciones (1.1) y (1.2) vemos que el ruido en (1.1), *ξij* , ha sido

1.4. Los tres principios fundamentales de la experimentaci ´on 19

reemplazado por *bj* + *ξ∗ij* , es decir, la variaci ´on entre grupos o bloques de unidades experimentales ha sido identificada y aislada de *ξ∗ij* . Dos tratamientos cualesquiera de los *t* considerados pueden compararse, libres de los efectos de bloques, tomando las diferencias dentro de los bloques de las respuestas de los dos tratamientos:

*yij − ykj* = *μi − μk* + *ξ∗ij − ξ∗kj* (1.3)

que como vemos no depende del efecto del boque *bj* .

Recapitulando, un objetivo del dise ˜no experimental es *seleccionar y agrupar el material experimental de modo que el ruido o error experimental en el experimento sea reducido. As´ı, las unidades experimentales sobre las cuales los tratamientos van a ser comparados deber´ıan ser tan parecidas como sea posible para que la menor diferencia significativa entre dos tratamientos pueda ser detectada.*

Por ´ultimo, de acuerdo a [14], una adici ´on ´util al diagrama de causa - efecto es in dicar c ´omo el dise ˜no experimental propuesto se dirige a cada factor listado. Se sugie ren las siguientes designaciones: *E* para un factor experimental, *B* para un factor manipulado por bloqueo, *O* para un factor que es mantenido constante en un valor, y *R* para un factor manipulado por aleatorizaci ´on. Esta designaci ´on indica clara mente c ´omo el dise ˜no propuesto trata con cada uno de los factores potencialmente importantes. La designaci ´on *O* sirve para recordarle al experimentador que el factor es mantenido constante durante el experimento actual pero puede ser variado en un experimento futuro. Ver la Figura 1.3.

Tambi ´en pueden usarse otras designaciones para los factores, por ejemplo, los factores experimentales pueden dividirse en dos tipos: factores controlables y factores de ruido, o tambi ´en como factores “dif´ıcil de cambiar” y “f ´acil de cambiar”.

En la Figura 1.4 se presenta otra manera de esquematizar el proceso y sus vari ables para el dise ˜no experimental. En la Figura 1.5 se ilustra la aplicaci ´on del an ´alisis de los factores y variables en un proceso de fabricaci ´on de un envase pl ´astico.

20 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

MAQUINA ´

Presi ´on de inyecci ´on (E)

DEFECTOS COSMETICOS ´

Velocidad de inyecci ´on (E)

Temperatura del molde (E)

Temperatura del inyector (O)

Tiempo de espera (O)

Temperatura del tambor (E)

Longitud de inyecci ´on del material (E)

Limpieza del tornillo y del tambor (O)

Limpieza de la tolva (O)

Purga (O)

METODO ´

MATERIAL

Pigmentaci ´on de la premezcla (B)

Humedad (B)

Flujo de fusi ´on (R)

Falta de entrenamiento (O)

Reemplazo de operadores (O)

Operadores en turnos (B)

HOMBRE

Figura 1.3: Diagrama de causa - efecto revisado, experimento del moldeo por inyecci ´on. Adap tado de [14].

Factores

controlables Caracter´ıstica o

PROCESO

Factores no

controlables

variable respuesta

Figura 1.4: Diagrama de Entrada - Proceso - Salida . Adaptado de [4].

1.5. Estructura de un dise ˜no experimental 21

Factores de diseno (controlables:) ˜

Tiempo ciclo, presi ´on molde, velocidad tornillo,

temperatura, tiempo de curado,

contenido de humedad.

*X*1 *X*2 *···* , *Xa*

Materia prima PROCESO

Caracter´ısticas de calidad:

Encogimiento, dureza, color

textura.

*Z*1 *Z*2 *···* , *Zb*

Factores de ruido (dif´ıciles de controlar:)

Par ´ametros de calidad del proveedor,

qu´ımica del pl ´astico, otras variables del proceso,

variables ambientales.

Figura 1.5: Diagrama de Entrada - Proceso - Salida en la fabricaci ´on de un envase pl ´astico. Adaptado de [4].

1.5. Estructura de un diseno experimental ˜

Esta Secci ´on fue tomada de [9]. Un dise ˜no experimental consiste de dos estruc turas b ´asicas, y es muy importante ser capaz de identificarlas y diferenciarlas, a saber:

La estructura de tratamientos,

La estructura de dise ˜no.

y el dise ˜no experimental comprende:

La elecci ´on de la estructura de tratamientos,

La elecci ´on de la estructura de dise ˜no y el m ´etodo de aleatorizaci ´on.

22 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

Estructura de tratamientos

Estructura de

dise˜no

Aleatorizacion´

Figura 1.6: Estructuras de tratamiento y de dise˜no y su combinaci ´on en un DOE. Adaptado de [9].

1.5.1. Estructura de tratamientos

Consiste del conjunto de tratamientos, combinaciones de tratamientos, o pobla ciones que el experimentador ha seleccionado para estudiar y/o comparar. Se de scriben a continuaci ´on algunas de las estructuras de tratamientos comunes, algunas tambi ´en de las cuales ser ´an estudiadas en el curso.

Estructura de tratamiento de un s ´olo factor: Esta estructura consiste de *t* tratamien tos o poblaciones donde no se asume relaci ´on entre tratamientos.

Estructura de tratamientos de dos factores: Consiste del conjunto de tratamien tos construido por combinaci ´on de los niveles de dos diferentes tipos de factores. El conjunto resultante de tratamientos, llamado *combinaciones de tratamientos*, es generado combinando cada nivel de un tipo de tratamiento con cada nivel del otro tipo de tratamiento. Si el primer tipo tiene *a* niveles y el segundo tiene *b* niveles, estos producen *ab* combinaciones de tratamientos, como por ejemplo el que se muestra a continuaci ´on, donde el factor A tiene *a* = 3 niveles y el factor B tiene *b* = 4 niveles, generando *ab* = 12 combinaciones de tratamientos, *AiBj* , *i* = 1*,* 2*,* 3, *j* = 1*,* 2*,* 3*,* 4:

Estructura de tratamiento de arreglos factoriales, estructura de tratamientos 2*k* y estructura de tratamientos factoriales fraccionados: Una estructura de tratamien to de arreglos factoriales consiste del conjunto de combinaciones de tratamien-

1.5. Estructura de un dise ˜no experimental 23

Factor *B*

Factor *A B*1 *B*2 *B*3 *B*4

*A*1 *A*1*B*1 *A*1*B*2 *A*1*B*3 *A*1*B*4

*A*2 *A*2*B*1 *A*2*B*2 *A*2*B*3 *A*2*B*4

*A*3 *A*3*B*1 *A*3*B*2 *A*3*B*3 *A*3*B*4

tos construidos por combinaci ´on de los niveles de dos o m ´as tipos diferentes de factores. La estructura de tratamiento de dos factores es tambi ´en un arreg lo factorial. En general, una estructura de tratamiento *k−*factorial es generada combinando *k* diferentes tipos de factores, cada uno con *a*1, *a*2, *...*, *ak* niveles, respectivamente, dando *a*1 *×a*2 *×...×ak* combinaciones de tratamientos. Cuando hay *k* factores y cada uno observado en dos niveles, la estructura de tratamien tos se denomina 2*k*. Una estructura de tratamiento de arreglos factoriales frac cionados Consiste de s ´olo una parte o fracci ´on de las posibles combinaciones de tratamientos en una estructura de tratamiento de arreglo factorial. Hay muchas t ´ecnicas sistem ´aticas para seleccionar una fracci ´on apropiada, la mayor´ıa de las cuales dependen de los supuestos que el experimentador hace acerca de las in teracciones entre los varios tipos de tratamientos en la estructura de tratamien to. Una estructura de tratamiento de arreglo de cuadrado latino involucra un arreglo factorial de tres factores con *n* tratamientos fila, *n* tratamientos colum na y *n* tratamientos celda. El arreglo de cuadrado latino consiste de *n*2 de las *n*3 combinaciones de tratamientos posibles, o de una fracci ´on *n*2*/n*3 - ´esima de las *n*3 combinaciones de tratamientos posibles. Un uso posible de este tipo de arreglo es cuando puede asumirse que no hay interacciones de dos factores ni de tres factores entre los tres tipos de tratamientos.

Arreglos factoriales con uno o m ´as controles: Las estructuras de tratamientos pueden ser generadas de muchas formas diferentes y a menudo incluyen la combinaci ´on de algunas de las estructuras anteriores. Por ejemplo, una estruc tura de tratamiento podr´ıa consistir de una estructura de un s ´olo factor con *t*

24 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

controles como niveles combinada con una estructura de tratamientos de un arreglo factorial de dos factores.

1.5.2. Estructura de diseno˜

Consiste del agrupamiento de las unidades experimentales dentro de grupos ho mog ´eneos o bloques de manera que las condiciones bajo las cuales son observados los tratamientos, son tan uniformes como resulte posible.

Dise ˜no completamente aleatorizado: Si todas las unidades experimentales son muy homog ´eneas, entonces s ´olo se necesita un ´unico grupo o bloque de obser vaciones, y las unidades experimentales pueden ser asignadas a los tratamien tos completamente al azar. Generalmente, los tratamientos son asignados a un n ´umero igual de unidades experimentales, aunque esto no es requerido. Es ta estructura de dise ˜no puede tambi ´en ser usada cuando las unidades expe rimentales no son homog ´eneas y el experimentador no puede agruparlas en gru pos m ´as homog ´eneos.

Dise ˜no bloqueado: Si se requiere m ´as de un grupo de unidades experimentales de manera que las unidades dentro de cada grupo son m ´as homog ´eneas que las unidades experimentales entre grupos.

• De bloques completos aleatorizados: Si hay *t* tratamientos, entonces la es tructura de dise ˜no de bloques completos aleatorizados consiste de bloques de *t* unidades experimentales cada uno. Cada tratamiento es asignado aleato riamente a una unidad experimental en cada bloque. Si cada bloque con siste de *c × t* unidades experimentales, donde *c* es un entero, entonces cada tratamiento puede ser asignado a *c* unidades experimentales dentro de ca da bloque. Esta es tambi ´en una estructura de dise ˜no de bloques completos aleatorizados. Una estructura de dise ˜no de bloques completos aleatorizados es pues cualquier esquema de bloqueo en el cual el n ´umero de unidades ex perimentales dentro de un bloque es un m ´ultiplo del n ´umero de tratamien-

1.6. Clasificaci ´on de los dise ˜nos experimentales 25

tos, y as´ı un conjunto completo de tratamientos puede ser asignado com pletamente al azar a *c* unidades experimentales en cada bloque.

• Cuadrados latinos: Esta estructura de dise ˜no consiste del bloqueo en dos direcciones. Para un experimento que involucra *t* tratamientos, *t*2 unidades experimentales son organizadas en un cuadrado de *t × t* donde las filas son llamadas *bloques fila* y las columnas son llamadas *bloques columna*. As´ı el arreglo de *t × t* unidades experimentales es bloqueado en dos direcciones. Para construir un dise ˜no experimental cuadrado latino, los tratamientos son asignados aleatoriamente a las unidades experimentales en el cuadrado de manera que cada tratamiento ocurra s ´olo una vez en cada bloque fila y en cada bloque columna.

• De bloques incompletos: Estos dise ˜nos ocurren cuando el n ´umero de tratamien tos excede al n ´umero de unidades experimentales en un bloque, de modo que un conjunto completo de tratamientos no puede ocurrir dentro de cada bloque.

• Varias combinaciones y generalizaciones: Hay varias maneras de agrupar a las unidades experimentales. Algunas veces un agrupamiento no satis face las definiciones anteriores pero todav´ıa proporciona una estructura de dise ˜no v ´alida. Un ejemplo es cuando los tama ˜nos de bloque var´ıa de bloque a bloque o donde algunos bloques son incompletos mientras otros son com pletos. En cualquier caso, estos otros esquemas de bloqueo pueden propor cionar un experimento con estructuras de dise ˜no muy viables.

1.6. Clasificacion de los dise ´ nos experimentales ˜

De acuerdo a [4], los dise ˜nos experimentales pueden clasificarse de la siguiente manera,

Para comparar dos o mas tratamientos: ´

Completamente aleatorizados

26 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos En bloques completos e incompletos

Cuadrados latinos y grecolatinos

Para estudiar el efecto de varios factores sobre una o mas variables respuestas: ´ Factoriales 2*k* y 3*k*

Factoriales fraccionados 2*k−p*

Disenos para optimizar procesos: ˜

Dise ˜nos para modelos de primer orden:

• Dise ˜nos Factoriales 2*k* y 2*k−p*

• Dise ˜nos de Plakett-Burman

• Dise ˜nos simplex

Dise ˜nos para modelos de segundo orden:

• Dise ˜no central compuesto

• Dise ˜no de Box-Behnken

• Dise ˜nos factoriales 3*k* y 3*k−p*

Disenos robustos: ˜

Arreglos ortogonales (dise ˜nos factoriales)

Dise ˜no con arreglo interno y externo

Diseno de mezclas (mezclas de ingredientes o formulaci ˜ on): ´

Dise ˜no lattice-simplex

Dise ˜no simplex con centroide

Dise ˜no con restricciones

Dise ˜no axial

1.7. La investigaci ´on experimental vs. DOE 27

Disenos con unidades experimentales de distinto tama ˜ no: ˜

Dise ˜nos experimentales de parcelas divididas (split - plot)

Dise ˜nos de medidas repetidas

Estos dise ˜nos est ´an construidos de estructuras de dise ˜no de bloques incompletos y estructuras de tratamiento de arreglos factoriales que incluyen dos o m ´as factores o tipos de tratamientos.

1.7. La investigacion experimental vs. DOE ´

Seg ´un [5], *la investigaci´on experimental* es b ´asicamente secuencial y en ´esta un experimento conduce a otro, en la medida en que se va obteniendo cierto conocimiento sobre un proceso y que nuevas preguntas son formuladas. Vea Figura 1.7.

[5] dice que la mayor´ıa de los experimentos son exploratorios y en este tipo de in vestigaci ´on el investigador est ´a interesado en encontrar los factores que tienen influ encia sobre los resultados de cierto proceso. Por ejemplo, uno puede estar interesado en si el grado de concentraci ´on de un compuesto qu´ımico, el tiempo de cocci ´on, la temperatura de horneado, el grado de enfriamiento, y la cantidad de presi ´on, tienen un efecto ya sea individual y/o conjunto sobre la ruptura de un tipo de plato de cer ´amica. El procedimiento obvio aqu´ı, es variar los niveles de esos factores y com parar la ejecuci ´on de las diferentes combinaciones de niveles. Luego de un experimen to exploratorio puede seguir un experimento confirmatorio, en el cual por ejemplo, se puede comparar el mejor procedimiento hallado en el experimento exploratorio, con el procedimiento actual y establecer cu ´al es mejor.

1.8. Consideraciones practicas ´

De acuerdo a [4], las metodolog´ıas estad´ısticas por s´ı solas no garantizan investi gaciones exitosas:

El conocimiento no estad´ıstico es vital: Se requiere buen conocimiento t ´ecnico y pr ´actico del proceso para seleccionar mejor los factores y el dise ˜no, y lograr el mejor an ´alisis estad´ıstico, interpretaci ´on y conclusi ´on.

28 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos Formulaci ´on de preguntas e hip ´otesis

Formulaci ´on del modelo para el problema de inter ´es

Traducci ´on a un modelo estad´ıstico lineal Desarrollo del dise˜no estad´ıstico Ejecuci ´on del experimento

Recolecci ´on de datos

An ´alisis Estad´ıstico

Interpretaci ´on de resultados

Formulaci ´on de nuevas hip ´otesis

etc.

Figura 1.7: Procesos en la investigaci ´on experimental. Adaptado de [5].

Reconocer entre significancia estad´ıstica e importancia pr ´actica: Diferencias es tad´ısticas no siempre corresponden a diferencias pr ´acticas de importancia.

Preferir la experimentaci ´on secuencial que un experimento ´unico y definitivo: La experimentaci ´on secuencial alcanza paulatinamente mayor precisi ´on en los conocimientos y soluciones. Seguir una estrategia bien definida y pensada. No confundir el t ´ermino “secuencial” con “mover un factor a la vez”.

1.9. Que se hace despu ´ es del primer experimento ´

De acuerdo a [4], aunque se haga una buena planeaci ´on y ejecuci ´on de un ex perimento, a veces el estudio no es definitivo ni concluyente, o bien, se cometieron errores, o se quiere llegar a m ´as y mejores decisiones. Qu ´e hacer despu ´es del primer experimento depende de los resultados obtenidos. [4] establecen que existen al menos

1.9. Qu ´e se hace despu ´es del primer experimento 29 los siguientes tres tipos de posibles acciones:

a) El estudio es planeado para realizarse por etapas, ya sea por la gran cantidad de factores o porque as´ı lo establece la metodolog´ıa: Cuando se tienen mucho factores de estudio rara vez el primer experimento es definitivo, por lo general al inicio se corre un dise ˜no altamente fraccionado o saturado, que permite estudiar s ´olo los efectos principales y no las interacciones entre factores, para detectar a los pocos factores influyentes y plantear posteriormente con estos un estudio m ´as completo.

b) El estudio se planea para desarrollarse por etapas, aunque no sean muchos los factores a considerar. Por cuesti ´on de econom´ıa y eficiencia no se gastan todos los recursos experimentales de una vez. Se recomienda inicialmente correr un diseno˜ factorial fraccionado de resolucion III ´ o IV ´ , y posteriormente si es necesario aclarar confusi ´on de efectos, correr una fracci ´on adicional. A veces tambi ´en aunque son pocos los factores de estudio, en el an ´alisis se encuentran dificultades en la determinaci ´on de la significancia de algunos efectos, por lo que luego se corre una r ´eplica adicional para obtener m ´as potencia en el experimento.

c) Se comete alg ´un error de planeaci ´on. Un error com ´un es la poca planeaci ´on del experimento en el cual por lo general se incurre en seleccionar inadecuadamente el ancho de los niveles de los factores, lo cual luego s ´olo se corrige corriendo parte o todo el experimento de nuevo. Otro error es *no incluir un factor potencialmente importante*, y sobre todo cuando su inclusi ´on no aumenta el n ´umero de corridas, ni el costo experimental.

Algunas de las acciones espec´ıficas despu ´es de un primer experimento:

a) Agregar otra fraccion´ en un diseno factorial fraccionado ˜ para eliminar dudas o ambig ¨uedades en la interpretaci ´on de efectos en experimentos de resolucion III ´ o IV ´ .

b) Reescalar, cuando no se tom ´o un espaciamiento adecuado entre niveles de uno o varios factores, lo cual puede implicar volver a correr todo el experimento de

30 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

nuevo. Un mal espaciamiento entre niveles impide detectar el efecto de un factor a ´un cuando ´este si sea influyente.

c) Quitar factores (colapsar) sobre los que se ha comprobado no afectan de ning ´un modo a la respuesta, o agregar otro, que no fue considerado en principio pero que ahora interesa estudiar. En el primer experimento no deber´ıan dejarse por fuera ning ´un factor controlable que pueda afectar s ´olo o interactuando con otros factores.

d) Obtener m ´as replicaciones del experimento (todo o parcialmente) cuando no se ha podido ser concluyente sobre alg ´un (o algunos) efecto (s). En el ANOVA tales efectos son reconocidos porque sus valores P est ´an entre 0.05 y 0.1, y puede ser que sea debido a baja potencia de las pruebas estad´ısticas.

e) Moverse de lugar. Es parte de la metodolog´ıa de superficie de respuesta, para buscar condiciones ´optimas de operaci ´on del proceso, donde m ´as que hallar el mejor tratamiento en el primer experimento, se buscan las mejores maneras de operar el proceso. Del primer experimento mediante un modelo de regresi ´on ajus tado, se sacan conclusiones acerca de hacia qu ´e direcci ´on mover los niveles de los factores (se trabaja con pocos factores), corriendo puntos necesarios para ajustar un modelo de primer orden (s ´olo efectos principales), incluyendo en el dise ˜no un punto central para detectar curvatura.

f) Aumentar el experimento cuando se detecte curvatura significativa, y consiste en seleccionar en forma adecuada puntos adicionales y correrlos, para estudiar tanto los efectos principales e interacciones como efectos cuadraticos puros ´ . Es necesario al menos tres niveles en cada factor para este tipo de estudios. Ej. diseno central compuesto ˜ que a partir de un diseno factorial ˜ que detect ´o cur vatura agrega puntos axiales.

1.10. Qu ´e hacer cuando ning ´un efecto es significativo 31

1.10. Que hacer cuando ning ´ ´ un efecto es significativo

[4] establecen que a veces al correr un experimento puede suceder que ninguno de los factores estudiados resultan significativos, lo cual se refleja en un *R*2 bajo. Algunas de las razones y posibles soluciones, son:

a) Variaci ´on excesivamente alta en el proceso conduce a un MSE muy grande, hacien do que sea dif´ıcil detectar factores activos. En ese caso hay que evaluar qu ´e otras fuentes de variaci ´on que quedaron en el t ´ermino de error estuvieron activas du rante el experimento. En caso de hallarlas, considerar un nuevo experimento donde se controlen o bloqueen tales fuentes de variaci ´on.

b) Niveles de factores poco espaciados, de forma que resulta imperceptible captar variaci ´on entre respuestas medias. Se requiere reescalar y volver a correr el ex perimento. Si se eligen bien los niveles y un factor es realmente significativo, la dispersi ´on en la variable respuesta durante el experimento debe ser mayor que la dispersi ´on durante la operaci ´on normal del proceso. Una manera de verificar si los niveles son suficientemente amplios es comparar la variaci ´on observada du rante el experimento contra la variaci ´on normal del proceso, y si la primera no es m ´as grande de modo evidente, entonces puede que los niveles no fueron elegidos adecuadamente.

c) Los factores elegidos no son los verdaderos responsables de la variaci ´on en la vari able respuesta, por tanto hay otros factores no considerados que deben ser in fluyentes.

d) Poca variaci ´on en la variable respuesta, bien sea por cualquiera de las dos situa ciones anteriores, o porque el tama ˜no de la prueba fue insuficiente para detectar cambios importantes. Esto ocurre en particular cuando la variable respuesta es de conteo, E.j. la proporci ´on de art´ıculos defectuosos en cada corrida, que resulta normalmente peque ˜no, por lo que se requieren muchas piezas o unidades para observar alg ´un producto defectuoso. Por tanto, si el tama ˜no de prueba no es sufi-

32 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos ciente habr ´a que volver a correr el experimento para agregar mayor informaci ´on.

e) Si no se est ´a satisfecho con los resultados de un experimento, antes de desecharlos hay que analizar qu ´e pas ´o, investigar cu ´ales de las cuatro situaciones anteriores pudo presentarse. La experimentaci ´on debe ser un proceso de generaci ´on de infor maci ´on y de aprendizaje.

1.11. Ejemplos de DOE

Los siguientes ejemplos tomados del texto de Milliken, G. A. y Johnson, D. E. *“Analysis of Messy Data. Vol. 1: Designed Experiments”*. Van Nostrand Reinhold. New York, pp. 47-66, se ofrecen aqu´ı con el fin de aclarar los conceptos sobre el dise ˜no de experimentos y el an ´alisis de varianza. No se dan f ´ormulas para el c ´alculo de los estad´ısticos en las tablas de an ´alisis de varianza, pero posteriormente, una vez se avance en dichos t ´opicos en el curso, el estudiante estar ´a en capacidad de establecer dichos c ´alculos.

1.11.1. Efectos de cinco dietas sobre la perdida de peso ´

Un nutricionista quiere estudiar el efecto de cinco dietas sobre la p ´erdida de peso. La estructura de tratamientos de este experimento es una clasificaci ´on en una v´ıa o de un s ´olo factor que involucra cinco tratamientos (las dietas). Muchas estructuras de dise ˜no diferentes pueden ser seleccionadas. Si hay 20 personas homog ´eneas, en tonces una estructura de dise ˜no completamente aleatorizada puede ser usada donde cada dieta es asignada aleatoriamente a cuatro personas. Un modelo para la estruc tura de tratamiento de una s ´ola v´ıa en una estructura de dise ˜no completamente aleatorizada es:

*yij* = *μi* + *ξij , i* = 1*,* 2*, . . . , t, j* = 1*,* 2*,...,n* (1.4)

Donde *μi* denota la media del *i*- ´esimo tratamiento (dieta) y *ξij* denota el error aleatorio. La tabla de an ´alisis de varianza para el anterior modelo lista las fuentes de variaci ´on y los grados de libertad:

1.11. Ejemplos de DOE 33

Fuentes de variaci ´on gl

Dieta 4

Error 15

Si hay 10 hombres y 10 mujeres en vez de 20 personas homog ´eneas, el sexo de la persona podr´ıa ser usada como un factor de bloqueo; una estructura de dise ˜no de bloques aleatorizados podr´ıa ser usada, donde cada dieta es asignada a dos hombres y dos mujeres. El modelo para una estructura de tratamientos de una v´ıa en una estructura de dise ˜no de bloques completos aleatorizados es:

*yij* = *μi* + *bj* + *ξij , i* = 1*,* 2*, . . . , t, j* = 1*,* 2*,...,n* (1.5)

Donde *bj* denota el efecto del bloque *j*. La tabla de an ´alisis de varianza para este modelo est ´a dada por

Fuentes de variaci ´on gl

Bloque (sexo) 1

Dieta 4

Error 14

En algunos casos el sexo de la persona no es una buena elecci ´on para un factor de bloqueo, dado que ´este puede tambi ´en ser un tipo de tratamiento. En ese caso la estructura de tratamiento es un arreglo factorial de dos v´ıas o una estructura de tratamientos de dos v´ıas consistiendo de las 10 combinaciones de tratamientos generadas por la combinaci ´on de los dos niveles de sexo con los cinco niveles de dieta. La estructura de dise ˜no ser´ıa un dise ˜no completamente aleatorizado con cada combinaci ´on de tratamiento observada dos veces.

Un modelo para una estructura de tratamiento de dos v´ıas en una estructura de dise ˜no completamente aleatorizada es:

*yijk* = *μij* + *ξijk, i* = 1*,* 2*, . . . , a, j* = 1*,* 2*,...,b k* = 1*,* 2*,...,n* (1.6) Donde *μij* es la media de la combinaci ´on del sexo *i* y de la dieta *j*. Algunas veces la

34 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos media *μij* es expresada como

*μij* = *μ* + *αi* + *βj* + *γij* (1.7)

donde *μ* es la media total, *αi* es el efecto del *i*- ´esimo sexo, *βj* es el efecto de la *j*- ´esima dieta y *γij* es el efecto interacci ´on. Las tablas de an ´alisis de varianza para el modelo (1.6) para ambas expresiones de *μij* son dadas a continuaci ´on:

Fuentes de variaci ´on gl

Modelo *μij*

Sexo\*Dieta 9

Error 10

Modelo *μ* + *αi* + *βj* + *γij*

Sexo 1

Dieta 4

Sexo\*Dieta 4

Error 10

Suponga ahora que las dietas tienen una estructura que consiste de una dieta de control y cuatro dietas hechas de las combinaciones de dos niveles de prote´ına y dos niveles de carbohidrato. La estructura de tratamientos de dietas es un arreglo factori al de dos v´ıas con un control que, cuando es cruzada con el sexo de la persona, genera una estructura de tratamientos de tres v´ıas con dos controles (uno para hombres y otro para mujeres). La estructura de dise ˜no es completamente aleatorizado. El modelo es:

*yijk* = *μij* + *ξijk, i* = 1*,* 2*, j* = 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4 *k* = 1*,* 2*,* (1.8)

donde *μ*10 y *μ*20 denotan los controles y los *μij* , *i* = 1*,* 2 y *j* = 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4 denota el sexo de la persona por combinaciones de tratamiento de dieta. La tabla de an ´alisis de varianza para el modelo (1.8) est ´a dada a continuaci ´on:

1.11. Ejemplos de DOE 35

Fuentes de variaci ´on gl

Sexo 1

Dieta 4

Control vs. 22 1

Prote´ına 1

Carbohidrato 1

Prote´ına\*Carbohidrato 1

Sexo\*Dieta 4

Sexo\*Control vs. 22 1

Sexo\*Prote´ına 1

Sexo\*Carbohidrato 1

Sexo\*Carbohidrato\*Prote´ına 1

Error 10

Donde 22 denota una comparaci ´on entre la dieta control y el promedio de las cuatro combinaciones de tratamientos prote´ına*×*carbohidrato.

1.11.2. Resistencia de cuatro pinturas de uso domestico a condiciones ambi- ´ entales

Una compa ˜n´ıa de pinturas quiere comparar las habilidades de cuatro pinturas blancas para casas para resistir las condiciones ambientales. Cuatro casas cuadradas, cada una con una cara mirando exactamente hacia el norte, estuvieron disponibles para el experimento.

Cada lado de una casa est ´a posiblemente expuesto a diferentes tipos de condi ciones clim ´aticas, as´ı los lados (indicado aqu´ı por las direcciones: norte, sur, este y oeste) de las casas pueden ser usadas tambi ´en como factor de bloqueo. Dado que el n ´umero de tratamientos (las cuatro pinturas) eran iguales al n ´umero de bloques, se us ´o una estructura de dise ˜no de cuadrados latinos, donde cada pintura puede ocur rir una y s ´olo una vez en cada casa y una y s ´olo una vez en cada direcci ´on. Uno de tales arreglos de pinturas para casa y direcciones se muestra en la tabla siguiente (el esquema de aleatorizaci ´on es asignar aleatoriamente las casas a los bloques fila y las

36 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos direcciones a los bloques columna).

Direcci ´on

Casa N S E W

1 A B CD

2 D A BC

3 C D AB

4 B C DA

Donde A, B, C y D denotan las cuatro pinturas.

El dise ˜no experimental es una estructura de tratamientos de una v´ıa en una es tructura de dise ˜no de cuadrado latino. Un modelo correspondiente es:

*μi* + *hj* + *dk* + *ξijk, i* = 1*,* 2*,* 3*,* 4 *j* = 1*,* 2*,* 3*,* 4 *k* = 1*,* 2*,* 3*,* 4 (1.9)

Donde *μi* denota la media para la pintura *i*, *hj* denota el efecto de la *j*- ´esima casa, *dk* denota el efecto de la *k*- ´esima direcci ´on, y *ξijk* denota el error. La tabla de an ´alisis de varianza para el modelo (1.9) es:

Fuente de variaci ´on gl

Casa 3

Direcci ´on 3

Pintura 3

Error 6

Ahora suponga que las pinturas tienen una estructura dada por (a) pintura base, (b) base m ´as aditivo I , (c) base m ´as aditivo II, (d) base m ´as aditivo I y m ´as aditivo II. Esta es una estructura de tratamientos de dos v´ıas donde un tipo de tratamiento es aditivo I con dos niveles, cero y algo, y el segundo tipo de tratamiento es aditivo II con dos niveles, cero y algo. Las cuatro combinaciones de tratamientos se muestran a continuaci ´on:

1.11. Ejemplos de DOE 37

Aditivo II

Aditivo I Nada algo

Nada Base Base + II

Algo Base + I Base + I + II

Un modelo para la estructura de tratamientos de dos v´ıas en una estructura de dise ˜no de cuadrado latino es:

*yijkm* = *μ* + *γi* + *βj* + (*γβ*)*ij* + *hk* + *dm* + *ξijkm* (1.10)

Donde *γi* denota el efecto del aditivo I, *βj* denota el efecto del aditivo II y (*γβ*)*ij* denota la interacci ´on entre los dos aditivos. La tabla de an ´alisis de varianza para el modelo (1.10) est ´a dada por:

Fuente de variaci ´on gl

Casa 3

Direcci ´on 3

Pintura 3

I 1

II 1

I\*II 1

Error 6

La ´unica diferencia entre el an ´alisis de los modelos (1.9) y (1.10) es que en (1.10) las pinturas tienen una estructura que es usada para particionar el efecto de la pintura entre los efectos debidos al aditivo I, el aditivo II, y la interacci ´on de los aditivos I y II. La parte del an ´alisis correspondiente a la estructura de dise ˜no permanece igual, aunque el an ´alisis de la estructura de tratamiento fue cambiada.

Finalmente, suponga que ocho casas estaban disponibles de modo que el exper imento pod´ıa ser conducido usando dos estructuras de dise ˜no de cuadrado latino repetidas. La siguiente tabla muestra una posible asignaci ´on de las pinturas a las combinaciones casa-direcci ´on:

38 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

CASA

C1 C2

Direcci ´on 1 2 3 4 5 6 7 8

N CABD DCAB

S DBCA CBDA

E ACDB ADBC

W BDAC BACD

Si las pinturas tienen una estructura de tratamientos de dos v´ıas como la descrita en el caso de los aditivos, entonces el modelo est ´a dado por

*yijkmn* = *μ* + *γi* + *βj* + (*γβ*)*ij* + *sk* + *hkm* + *dn* + *ξijkmn* (1.11)

donde *sk* denota el cuadrado *k* y *hkm* denota la casa *m* en el cuadrado *k*. La tabla de an ´alisis de varianza est ´a dada por:

Fuente de variaci ´on gl

Casa 7

Cuadrado 1

Casa (cuadrado) 6

Direcci ´on 3

Pintura 3

I 1

II 1

I\*II 1

Error 18

1.11.3. Proteccion del acero contra el calor ´

Una estructura de dise ˜no de cuadrado latino es muy ´util cuando hay una necesi dad de bloquear en dos direcciones. Pero un arreglo de cuadrado latino usado por los experimentadores no es una estructura de dise ˜no de cuadrado latino. Este ejemplo muestra las consecuencias de usar una estructura de tratamiento de arreglo cuadra do latino.

1.11. Ejemplos de DOE 39

Dos tipos de aditivos para pintura van a combinarse y placas de acero son pin tados. El objetivo del experimento es estudiar la habilidad de las combinaciones de pintura para proteger al acero del calor. Hay cinco niveles de cada aditivo y cinco temperaturas en las cuales se chequear ´a la capacidad de protecci ´on.

Este experimento es acomodado en un arreglo cuadrado latino donde los niveles del aditivo I son las filas, los niveles del aditivo II son las columnas, y los niveles de temperatura son asignados a las celdas dentro del cuadrado. Este arreglo genera 25 combinaciones de tratamientos. Las unidades experimentales son 25 placas de acero de 0.2 cm de espesor y 1 m2 de ´area. El proceso de aleatorizaci ´on usado deber´ıa asignar aleatoriamente una de las 25 combinaciones de tratamiento a cada una de las placas de acero.

En este caso, la estructura de tratamiento es una fracci ´on 1/5 de un arreglo fac torial 53 (como consiste de 25 de las 125 combinaciones de tratamientos posibles), llamada un arreglo cuadrado latino. La estructura de dise ˜no es una asignaci ´on com pletamente aleatorizada, en la medida en que las combinaciones son asignadas com pletamente al azar a las placas de acero. Dado que este es un factorial fraccionado, cada uno de los efectos principales est ´a parcialmente aliado con la interacci ´on doble de los otros dos factores y con la interacci ´on de los tres factores.

Con el fin de analizar apropiadamente este dise ˜no experimental, deben hacerse algunos supuestos sobre los par ´ametros en el modelo. Los supuestos usuales son que no hay interacciones de dos o de tres factores. Sin embargo, deber´ıamos ser muy cuidadosos de no hacer tal supuesto sin tener alguna informaci ´on previa (la cual puede provenir de otros experimentos, de la literatura existente, etc.) que muestre que tales interacciones, de hecho, son insignificantes. Uno de tales arreglos cuadrado latino se da en la siguiente tabla:

40 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

Nivel de aditivo II

Nivel de aditivo I 1 2 3 4 5

1 *T*1 *T*2 *T*3 *T*4 *T*5

2 *T*5 *T*1 *T*2 *T*3 *T*4

3 *T*4 *T*5 *T*1 *T*2 *T*3

4 *T*3 *T*4 *T*5 *T*1 *T*2

5 *T*2 *T*3 *T*4 *T*5 *T*1

Un modelo para una estructura de tratamientos de cuadrado latino es: *yijk* = *μ* + *A*1*i* + *A*2*j* + *Tk* + *ξijk* (1.12)

Donde *A*1*i* denota el efecto del *i*- ´esimo nivel del aditivo I, *A*2*j* denota el efecto del *j*- ´esimo nivel del aditivo II, y *Tk* denota el efecto del *k*-esimo nivel de temperatura. La tabla de an ´alisis de varianza para este modelo es:

Fuente de variaci ´on gl

Aditivo I 4

Aditivo II 4

Temperatura 4

Residual 12

El t ´ermino *Residual* es usado en vez de *Error*, dado que la correspondiente suma de cuadrados involucra el error m ´as cualesquiera efectos de interacci ´on que puedan ser no nulos. Si no es correcto el supuesto de interacciones nulas, entonces el cuadra do medio residual ser ´a demasiado grande y el estad´ıstico de la prueba *F* resultante ser ´a demasiado peque ˜no. Consecuentemente, si hay interacci ´on en el experimento, esta no puede ser descubierta y cualesquiera efectos de tratamientos detectables pueden ser enmascarados (ocultos).

1.11. Ejemplos de DOE 41

1.11.4. Efectos de los niveles de nitrogeno (N) y de potasio (K) sobre una varie- ´ dad de ma´ız

Un modelo y el an ´alisis resultante consiste de tres componentes b ´asicos, denomi nados la estructura de tratamientos del modelo, la estructura de dise ˜no y la estruc tura de error. Este ejemplo demuestra c ´omo pueden usarse estas tres componentes b ´asicas.

Un cultivador quiere estudiar el efecto de tres niveles de nitr ´ogeno y cuatro nive les de potasio sobre su variedad de ma´ız. Su estructura de tratamientos es un ar reglo factorial de dos v´ıas con 12 (3 niveles de N *×* 4 niveles de K) combinaciones de tratamientos. El tiene tres parcelas llamadas bloques, cada una de las cuales ´ es dividida en 12 partes. Cada combinaci ´on de tratamientos es asignada aleatoria mente a un parte en cada parcela. As´ı, la estructura de dise ˜no es un bloque completo aleatorizado, pues cada combinaci ´on de tratamiento ocurre una vez en cada bloque. El dise ˜no experimental es una estructura de tratamiento de dos v´ıas (factores) en una estructura de dise ˜no de bloque completo aleatorizado. (Los bloques en un dise ˜no de bloques completos aleatorizados son llamados replicaciones por algunos autores, sin embargo, aqu´ı se prefiere llamarlos bloques o replicaciones bloqueadas con el fin de distinguirlos de las replicaciones en el dise ˜no completamente aleatorizado).

El modelo para este ejemplo es:

*yijk* = *μij* + *bk* + *ξijk* (1.13)

Donde *μij* es la media del *i*- ´esimo nivel de N con el *j*- ´esimo nivel de K, *bk* es el efecto del *k*- ´esimo bloque, y *ξijk* denota el error aleatorio. En general, cuando un modelo es construido, involucra la suma de las tres partes:

*y* = Estructura de Tratamiento+Estructura de Dise ˜no+Estructura de Error(es) (1.14)

De la misma forma, la tabla de an ´alisis de varianza tiene tres partes. La tabla de an ´alisis de varianza general para el modelo en (1.14) es:

42 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

Fuente de variaci ´on gl

Estructura de Dise˜no (*gl*)

Estructura de Tratamiento (*gl*)

Estructura de Error (*gl*)

La tabla de an ´alisis de varianza para el modelo en (1.13) es:

Fuente de variaci ´on gl

Dise˜no

Bloques 2

Tratamientos 11

N 2

K 3

N\*K 6

Error 22

En general una concesi ´on debe ser hecha para posibilitar m ´as de un t ´ermino de error. Por ejemplo, los modelos split-plot y de medidas repetidas tendr ´an m ´as de un t ´ermino de error.

1.11.5. Bloques y replicaciones

En la mayor´ıa de los textos sobre dise ˜no de experimentos, o no se hace distinci ´on entre bloques y replicaciones, o hay confusi ´on sobre tal distinci ´on. Este ejemplo se incluye para demostrar la diferencia entre los dos conceptos.

Suponga que el investigador quiere estudiar cuatro tratamientos en una estructura de tratamiento de una v´ıa (un s ´olo factor) y s ´olo tiene dos unidades experimentales homog ´eneas por bloque. En este caso la estructura de dise ˜no que debe ser usada es un dise ˜no de bloques incompletos. Si hay suficientes bloques de modo que cada par de tratamientos puedan ocurrir juntos en un bloque el mismo n ´umero de veces, entonces es posible usar un dise ˜no de bloques incompletos balanceados. Por ejemplo, los cuatro tratamientos podr´ıan ser asignados a los bloques como se muestra en la

1.11. Ejemplos de DOE 43 siguiente tabla:

Bloques Tratamientos

1 1y2

2 1y3

3 1y4

4 2y3

5 2y4

6 3y4

En este caso, hay seis bloques en el dise ˜no y cada tratamiento es replicado tres ve ces. Este punto se ˜nala que los bloques y las replicaciones no son el mismo concepto. Ellos son equivalentes ´unicamente para la estructura de dise ˜no de bloques comple tos aleatorizados, donde cada tratamiento es observado una y s ´olo una vez en cada bloque. En este ejemplo, la estructura de dise ˜no est ´a asociada con los seis bloques, y no con las tres replicaciones que s ´olo pueden ocurrir. El modelo para el arreglo en la anterior tabla es:

*yij* = *μi* + *bj* + *ξij* (1.15)

donde el par (*i*, *j*) puede tomar s ´olo aquellos valores de combinaciones de tratamien to\*bloque que son observados. La tabla de an ´alisis de varianza corresponde a:

Fuente de variaci ´on gl

Bloque 5

Tratamiento 3

Error 3

Los anteriores fueron s ´olo algunos ejemplos de experimentos comunes, sin embargo, hay muchas otras formas de construir dise ˜nos experimentales combinando varias estructuras de dise ˜no y estructuras de tratamientos.

44 Introducci ´on al dise ˜no de experimentos

Cap´ıtulo 2

Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE

Debe tenerse en cuenta que el modelo estad´ıstico a usar para realizar un correcto an ´alisis de los resultados debe ser elegido seg ´un el dise ˜no experimental.

2.1. Supuestos basicos ´

Seg ´un [9], en la construcci ´on del modelo estad´ıstico en un DOE se hacen dos supuestos b ´asicos:

1. Las componentes de la estructura de dise ˜no son efectos aleatorios, es decir, los bloque usados son una muestra aleatoria de la poblaci ´on de bloques o de unidades experimentales.

2. Se asume que no hay interacci ´on entre las componentes de la estructura de dise ˜no con las componentes de la estructura de tratamientos, en otras palabras, se asume que las relaciones que existen entre los tratamientos ser ´an consis tentes de bloque a bloque (excepto por la variaci ´on aleatoria), o dicho de otra forma, que los bloques no influenciar ´an las relaciones entre los tratamientos. Sin embargo, si pudiera ocurrir tal interacci ´on, los factores de ruido o bloqueo deber´ıan incluirse en la estructura de tratamientos o los valores de estos fac tores de ruido podr´ıan ser considerados como covariables con la posibilidad de coeficientes de regresi ´on diferentes.

Por lo anterior, [9] afirma que la estructura de dise ˜no debe ser seleccionada usando todo el conocimiento disponible sobre las unidades experimentales y de manera inde

45

46 Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE

pendiente de la estructura de tratamientos, es decir, no permitir que la estructura de tratamientos determine el uso de una pobre estructura de dise ˜no. As´ı mismo el experi mentador deber´ıa seleccionar la estructura de tratamientos sin ning ´un conocimiento sobre la estructura de dise ˜no, es decir, no dejar que esta ´ultima estorbe en la selecci ´on del conjunto necesario de tratamientos. Aunque es posible que despu ´es de que han sido seleccionadas la estructura de dise ˜no apropiada y la estructura de tratamientos deseada, resulten necesarias algunas modificaciones en una u otra estructura para hacerlas compatibles y para permitir llevar a cabo un experimento efectivo.

2.2. Usos del analisis de varianza ´

Los modelos de an ´alisis de varianza son usados b ´asicamente para analizar los efectos de las variables explicatorias bajo estudio sobre la variable respuesta. Es pec´ıficamente, los estudios de un s ´olo factor son utilizados para comparar los efec tos de diferentes niveles del factor, para determinar “el mejor nivel”, y similarmente, en los estudios multifactoriales, los modelos de an ´alisis de varianza se usan para determinar si los diferentes factores interact ´uan, cu ´ales factores son claves, cu ´ales combinaciones de los factores son “las mejores”, etc.

2.3. Modelo de analisis de varianza o ANOVA ´

Seg ´un [7], los modelos de an ´alisis de varianza son herramientas estad´ısticas que permiten estudiar la relaci ´on entre una variable respuesta y una o m ´as variables ex plicatorias o variables predictoras. Pero estos modelos no requieren ning ´un supuesto acerca de la relaci ´on estad´ıstica entre la variable respuesta y las variables predictoras, ni requieren que las variables predictoras sean cuantitativas.

2.3.1. Relacion entre regresi ´ on y an ´ alisis de varianza ´

Siguiendo a [7], como es bien sabido, el an ´alisis de regresi ´on estudia la relaci ´on estad´ıstica entre una o m ´as variables predictoras y una variable respuesta. Tanto las variables predictoras y la respuesta son cuantitativas en los modelos de regresi ´on ordinarios (excepto en modelos con variables indicadoras). La funcion de regresi ´ on´

2.3. Modelo de an ´alisis de varianza o ANOVA 47

establece la naturaleza de la relacion entre la respuesta media y los niveles de las ´ variables predictoras. En el an ´alisis de regresi ´on se hace el an ´alisis de varianza para probar la significancia de la regresi ´on, pero el an ´alisis de varianza es una t ´ecnica m ´as general. Los modelos de an ´alisis de varianza son un tipo b ´asico de modelo estad´ıstico, que al igual que la regresi ´on, est ´an interesados en la relaci ´on entre una o m ´as vari ables predictoras y una variable respuesta, tambi ´en estos modelos son apropiados tanto para datos observacionales como datos experimentales y la variable respuesta es de tipo cuantitativo. Pero los modelos de an ´alisis de varianza se diferencian de los modelos de regresi ´on en lo siguiente:

1. Las variables predictoras o explicatorias pueden ser cualitativas (g ´enero, ubi caci ´on geogr ´afica, tama ˜no de la planta, etc)

2. Si las variables predictoras son cuantitativas, no se hacen supuestos acerca de la naturaleza de la relaci ´on estad´ıstica entre ellas y la variable respuesta. Por tanto la necesidad de especificar la naturaleza de la funci ´on de regresi ´on encontrada en el an ´alisis de regresi ´on ordinaria no se presenta en los modelos de an ´alisis de varianza.

La Figura 2.1 ilustra las diferencias esenciales entre regresi ´on y los modelos de an ´ali sis de varianza. Vemos que en el an ´alisis de regresi ´on se busca ajustar la curva que relaciona el volumen promedio de ventas (Y) a tres niveles dados del gasto en publici dad (X), en cambio, en el an ´alisis de varianza los tres niveles de gastos en publicidad son tratados como poblaciones separadas, cada una conduciendo a una distribuci ´on de probabilidad de volumen de ventas. Las diferencias cuantitativas entre los tres niveles de gastos en publicidad y sus relaciones estad´ısticas con los valores espera dos de volumen de ventas no son consideradas por el modelo de an ´alisis de varianza.

48 Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE

5

2

.

0

)

0

2

.

0

5

1

.

0

0

1

.

0

5

0

.

0

0

0.

1000

800

600

400

200

0

$

(

d

a

d

i

c

i

l

b

u

P

l

e

v

i

N

Publicidad $200

Publicidad $400

Publicidad $1000

0

130 110 90 70 50 30 10 Vol. Ventas (miles $)

(a)

μ1 μ2 μ3 Vol. Ventas

(b)

Figura 2.1: Relaci ´on entre regresi ´on y ANOVA. Adaptado de [7]. (a) Punto de vista de la re gresi ´on: interesa la funci ´on que establece c ´omo cambia la media de la respuesta con los cambios en los valores del predictor lineal; (b) Punto de vista del modelo ANOVA: solo interesa que en los distintos niveles de valores del predictor lineal, existen diferentes poblaciones estad´ısticas de la respuesta que se diferencian en sus medias, pero no interesa modelar los cambios en estas medias como funci ´on de los valores del predictor lineal.

2.3.2. Eleccion entre regresi ´ on y ANOVA ´

Tal como establece [7], si las variables explicatorias son cualitativas, podemos tra bajar con variables indicadoras en el an ´alisis de regresi ´on o recurrir a los modelos de an ´alisis de varianza. Ambos m ´etodos llevan a los mismos resultados, sin embar go, el an ´alisis de varianza permite ciertas simplificaciones computacionales, pero de cualquier modo bajo estas circunstancias no es fundamental elegir entre regresi ´on y un modelo de an ´alisis de varianza. De otra parte, hay que elegir entre los dos tipos de modelaci ´on cuando las variables predictoras son cuantitativas. Una posibilidad es reconocer expl´ıcitamente la naturaleza cuantitativa de las variables predictoras y es to s ´olo puede hacerse con un modelo de regresi ´on. La otra posibilidad es establecer clases o rangos para cada variable cuantitativa y emplear bien sea variables indicado-

2.3. Modelo de an ´alisis de varianza o ANOVA 49

ras en un modelo de regresi ´on o un modelo de an ´alisis de varianza. La estrategia de establecer clases para las variables predictoras cuantitativas es algunas veces usada en estudios a gran escala como un medio para obtener un ajuste de regresi ´on no param ´etrico cuando hay duda sustancial acerca de la naturaleza de la relaci ´on es tad´ıstica. En este caso el an ´alisis de regresi ´on y los modelos de an ´alisis de varianza no conducen al mismo resultado.

En general, los modelos de an ´alisis de varianza son aplicados cuando es de inter ´es estudiar los efectos de una o m ´as variables predictoras sobre una variable respuesta. Las variables predictoras son denominadas factores o tratamientos.

2.3.3. Modelo lineal de la variable respuesta relativo a modelos ANOVA

En los modelos ANOVA se asume que cada variable respuesta es medible y est ´a re presentada matem ´aticamente en un modelo lineal. La idea general del modelo es ex presar las observaciones generalmente denotadas por *Y* , en t ´erminos de “efectos” que contribuyen a *Y* , los cuales se pueden clasificar en tres categor´ıas:

Efectos de Tratamiento

Efectos de Dise ˜no

Efectos de Error

Los efectos de tratamientos son un reflejo de los efectos de los tratamientos simples o de las combinaciones de factores. Los efectos de dise ˜no son determinados por el dise ˜no para el control del error, en particular, los efectos debidos a las varias clases de bloqueo. Los efectos de error representan diferentes clases de variaci ´on aleatoria. Seg ´un [4], el error aleatorio es la variabilidad observada que no se puede explicar por los factores estudiados, sino que es debida a “causas comunes o aleatorias” que generan la “variabilidad inherente del proceso”. Incluye efectos peque ˜nos de factores no estudiados, variabilidad de las mediciones hechas bajo mismas condiciones, y el error experimental. El error experimental representa los errores del experimentador en la planeaci ´on y ejecuci ´on del experimento. Si el factor o factores estudiados son

50 Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE

influyentes sobre la variable respuesta, se espera que la variabilidad observada en esta durante la experimentaci ´ ´ on sea explicada significativamente por tales factores y en menor medida por el error aleatorio, y que ´este ´ultimo sea realmente aleatorio.

El modelo ANOVA es lineal desde que la variable respuesta es una funci ´on lineal de los par ´ametros del modelo.

2.3.4. Modelo ANOVA I (efectos fijos) vs. Modelo ANOVA II (efectos aleatorios)

Siguiendo a [7], para establecer con simplicidad qu ´e son y en qu ´e se diferencian estos modelos, considere el caso de un s ´olo factor. Podemos distinguir dos modelos ANOVA: Modelo ANOVA I y modelo ANOVA II. En el primero s ´olo estamos interesados en considerar y concluir para un conjunto fijo de niveles del factor, en cambio en el segundo, los niveles considerados constituyen una muestra aleatoria tomada de la poblaci ´on de niveles del factor, con el fin de generalizar los resultados a toda la poblaci ´on de niveles.

Supuestos basicos ´

En el modelo ANOVA I con un s ´olo factor se tienen las siguientes consideraciones:

1. Para cada nivel del factor hay una distribuci ´on de probabilidad asociada para la variable respuesta,

2. Todas las distribuciones de probabilidad son normales,

3. Todas las distribuciones de probabilidad tienen la misma varianza,

4. Las respuestas en cada nivel del factor son selecciones aleatoriamente de la cor respondiente distribuci ´on de probabilidad y son independientes de las respues tas en cualquier otro nivel del factor.

Bajo estas condiciones las distribuciones de las respuestas en cada nivel del factor s ´olo difieren con respecto a sus medias. Las diferencias en las medias reflejan por tanto los efectos esenciales de los niveles del factor. Este modelo es conocido como modelo de efectos fijos.

2.3. Modelo de an ´alisis de varianza o ANOVA 51

Por el contrario, en el modelo ANOVA II, aunque contin ´ua operando los supuestos de normalidad, con un s ´olo factor las medias de sus niveles son en s´ı variables aleato rias y la variabilidad entre estas medias es un par ´ametro de inter ´es. La varianza total de la respuesta es descompuesta en dos componentes una de las cuales es debida a la variabilidad en las medias de niveles del factor. Las respuestas observadas en niveles diferentes son independientes, sin embargo, las respuestas en un mismo nivel no son independientes. Este modelo es tambi ´en denominado de componentes de varianza o modelo de efectos aleatorios.

52 Generalidades de los Modelos ANOVA para DOE

Cap´ıtulo 3

Experimentos con un solo factor de efectos fijos ´

3.1. Introduccion´

Los experimentos con un s ´olo factor comprenden experimentos que se usan cuan do el objetivo es comparar m ´as de dos tratamientos pero que corresponden a niveles de un mismo factor, con el fin de tomar una decisi ´on en la soluci ´on de un problema real:

Comparar dos o tres m ´aquinas

Comparar varios procesos para la obtenci ´on de un producto o resultado dado Comparar varios materiales,

Comparar varias dietas

Etc.

Por lo general las comparaciones se hacen en t ´erminos de las medias poblacionales, aunque tambi ´en es importante la comparaci ´on de varianzas y capacidad actual para cumplir ciertas especificaciones. Las estructuras de dise ˜nos pueden ser como se in dica en la Tabla 3.1.

3.2. Diseno completamente aleatorizado o DCA ˜

Es el m ´as simple de todos los dise ˜nos pues contempla s ´olo dos fuentes de variabil idad: los tratamientos y el error aleatorio. Se denominan completamente aleatorizados

53

54 Experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos

Tabla 3.1: Estructuras de dise˜no en experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos, y modelos estad´ısticos correspondientes

Diseno˜ Factores

de bloqueMetodo estad´ ´ ıstico Modelo estad´ıstico

izado0ANOVA con un solo crite rio de clasificaci ´on*Yij* = *μ* + *αi* + *εij* Completamente aleator

En bloques completos

aleatorizados1ANOVA con dos criterios de clasificaci ´on

En cuadrados latinos 2ANOVA con tres criterios de clasificaci ´on

En cuadrados grecolati

*Yij* = *μ* + *αi* + *βj* + *εij Yijk* = *μ* + *αi* + *βj* + *γk* + *εijk*

nos 3ANOVA con cuatro crite rios de clasificaci ´on*Yijkl* = *μ* + *αi* + *βj* + *γk* + *δl* + *εijkl*

Notaci ´on: *Y* es la variable respuesta; *μ* es la media global; *αi* es el efecto del i- ´esimo tratamiento; *βj* , *γk* y *δl*, son los efectos de bloques y *ε* es el error aleatorio

porque las corridas experimentales se realizan en orden aleatorio completo, dado que no hay restricciones impuestas por factores de bloqueo.

3.2.1. Aleatorizacion´

Para lograr que el dise ˜no sea completamente aleatorizado es necesario un meca nismo para tal fin. A continuaci ´on se explica un procedimiento sugerido por [2] que puede ser realizado a mano o con software que incluya una funci ´on de generaci ´on de n ´umeros aleatorios de una distribuci ´on U(0,1) y que permita ordenar por los valores de una columna: Suponga *a* niveles o tratamientos del factor considerado. Sea *ni*

el n ´umero de replicaciones a ser tomadas en el i- ´esimo tratamiento, y *N* =  *a i*=1

*ni* el

total de observaciones (el n ´umero total de unidades experimentales). Codifique los tratamientos de 1 hasta *a* y etiquete las unidades experimentales de 1 hasta *N*.

Paso 1: En una columna ingrese *n*1 veces el n ´umero 1, *n*2 veces el n ´umero 2, ..., *na* veces el n ´umero *a*, teniendo as´ı un total de *N* entradas en dicha columna; estos valores representan a las etiquetas de los tratamientos.

Paso 2: Ingrese en otra columna *N* n ´umeros aleatorios de una *U*(0*,* 1) con suficientes d´ıgitos para evitar empates (n ´umeros iguales).

3.2. Dise ˜no completamente aleatorizado o DCA 55

Paso 3: Reordene ambas columnas usando como criterio el orden ascendente de los n ´umeros aleatorios, as´ı quedan ordenadas en forma aleatoria las etiquetas de los tratamientos en la primera columna.

Paso 4: Asigne la unidad experimental *l* al tratamiento cuya etiqueta qued ´o en la fila *l*- ´esima, *l* = 1*,* 2*,...,N*.

Tenga en cuenta que si el n ´umero total de unidades experimentales *N* es un entero con *k* d´ıgitos, entonces los n ´umeros aleatorios en la columna 2 deber´ıan ser una lista de n ´umeros aleatorios de *k* d´ıgitos.

En R podemos realizar de manera sencilla lo anterior. Suponga que se va a ejecutar un DOE bajo un DCA con un factor de efectos fijos en *a* = 3 niveles: 35, 40 y 45, cada uno replicado *ni* = 4 veces, *i* = 1*,* 2*,* 3, por lo que se usar ´an *N* = 12 unidades experimentales y por tanto ser ´an 12 corridas. Un programa R para construir el plan de aleatorizaci ´on es como sigue.

Codigo R 3.2.1. ´ *Plan de aleatorizaci´on en un DCA balanceado unifactorial.*

ni=4 #tama˜no muestras balanceadas

a=3 #niveles del factor

tratamientos=factor(rep(c(35,40,45),each=ni)) #etiquetas de los tratamientos replicados ni=4 tratamientos

N=a\*ni #total de unidades experimentales

set.seed(1234)

fac=sample(tratamientos,N) #m.a.s sin reemplazo sobre los tratamientos replicados UE=1:N #etiquetas de las unidades experimentales

plan=data.frame(Unidad=UE,Tratamiento=fac)

plan

Esta programaci ´on produce los siguientes resultados

Salida R 3.2.1.

> tratamientos

[1] 35 35 35 35 40 40 40 40 45 45 45 45

Levels: 35 40 45

56 Experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos

> plan

Unidad Tratamiento

1 1 35

2 2 40

3 3 45

4 4 40

5 5 45

6 6 40

7 7 35

8 8 45

9 9 35

10 10 40

11 11 35

12 12 45

Siguiendo los pasos 1 a de aleatorizaci ´on descritos, el programa tambi ´en puede dise ˜narse de la siguiente forma:

Codigo R 3.2.2. ´ *Plan de aleatorizaci´on en un DCA balanceado unifactorial.*

ni=4 #tama˜no muestras balanceadas

a=3 #niveles del factor

tratamientos=factor(rep(c(35,40,45),each=ni)) #etiquetas de los tratamientos replicados ni=4 tratamientos

N=a\*ni #total de unidades experimentales

set.seed(1234)

numaleat=runif(N) #Extrayendo N n´umeros aleatorios U(0,1)

numaleat

plani=data.frame(tratamientos,numaleat)

planf=data.frame(plani[order(numaleat),],UE=1:N,row.names =1:N)

planf

En anterior programa produce los siguientes resultados:

Salida R 3.2.2.

> tratamientos

[1] 35 35 35 35 40 40 40 40 45 45 45 45

Levels: 35 40 45

3.2. Dise ˜no completamente aleatorizado o DCA 57

> numaleat

[1] 0.113703411 0.622299405 0.609274733 0.623379442 0.860915384 0.640310605 [7] 0.009495756 0.232550506 0.666083758 0.514251141 0.693591292 0.544974836 > planf

tratamientos numaleat UE

1 40 0.009495756 1

2 35 0.113703411 2

3 40 0.232550506 3

4 45 0.514251141 4

5 45 0.544974836 5

6 35 0.609274733 6

7 35 0.622299405 7

8 35 0.623379442 8

9 40 0.640310605 9

10 45 0.666083758 10

11 45 0.693591292 11

12 40 0.860915384 12

Si el dise ˜no fuera desbalanceado, es decir, si el n ´umero de r ´eplicas o tama ˜no de muestra en cada nivel no fueran iguales, podr´ıa ejecutarse la aleatorizaci ´on en R como se ejemplifica a continuaci ´on. Suponga de nuevo un factor de tres niveles: 35, 40 y 45 pero con *n*1 = 5, *n*2 = 4 y *n*3 = 3, respectivamente

Codigo R 3.2.3. ´ *Plan de aleatorizaci´on en un DCA desbalanceado unifactorial. Note el uso del argumento* times *en la funci´on R* rep() *en lugar del argumento* each *usado en los dos c´odigos R previos.*

ni=c(5,4,3) #tama˜no muestras balanceadas

tratamientos=factor(rep(c(35,40,45),times=ni)) #etiquetas tratamientos replicados ni, i=1, 2, 3 tratamientos

N=sum(ni) #total de unidades experimentales

set.seed(1234)

fac=sample(tratamientos,N) #m.a.s sin reemplazo sobre los tratamientos replicados UE=1:N #etiquetas de las unidades experimentales

plan=data.frame(Unidad=UE,Tratamiento=fac)

plan

El resultado de este c ´odigo es como sigue:

58 Experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos Salida R 3.2.3.

> tratamientos

[1] 35 35 35 35 35 40 40 40 40 45 45 45

Levels: 35 40 45

> plan

Unidad Tratamiento

1 1 35

2 2 40

3 3 45

4 4 40

5 5 45

6 6 35

7 7 35

8 8 45

9 9 35

10 10 40

11 11 35

12 12 40

Si la sucesi ´on de corridas es aleatoria, cada sucesi ´on posible tiene la misma opor tunidad de ocurrir, luego las corridas y las asignaciones se dicen son completamente aleatorias. Sin embargo, a ´un con mecanismos de aleatorizaci ´on pueden aparecer tratamientos en secuencia, y por tanto el experimentador podr´ıa no desear ciertos ordenes en la experimentaci ´ ´ on, pero al mirar la secuencia resultante no se deber´ıa decidir cambiarla subjetivamente porque no parece aleatoria.

3.2.2. Modelo para un diseno completamente aleatorizado, un factor efectos ˜ fijos

Existen dos posibles modelos en este caso. El primero es el modelo de medias de tratamientos,

*Yij* = *μi* + *εij ,* (3.1)

y el segundo es el modelo de efectos de tratamientos,

*Yij* = *μ* + *αi* + *εij ,* sujeto a  *a i*=1

*niαi* = 0*.* (3.2)

3.2. Dise ˜no completamente aleatorizado o DCA 59 donde

*Yij* denota la variable aleatoria que corresponde a la respuesta de la j- ´esima unidad experimental asignada al i- ´esimo tratamiento, *i* = 1*,* 2*,...,a* y *j* = 1*,* 2*,...,ni*,

*μi* es la respuesta esperada al i- ´esimo tratamiento si ´esta es observada bajo condiciones experimentales id ´enticas y medida sin error,

*εij* es el error aleatorio.

Observe que en (3.2) *μi* es reemplazado por *μ* + *αi*, donde,

*μ* denota la respuesta global promedio y

*αi* es la desviaci ´on o el efecto del i-esimo tratamiento sobre la respuesta media global.

Por tanto, el an ´alisis de las diferencias entre las medias de tratamiento *μi* es equiva

lente a examinar las diferencias entre los efectos *αi*, bajo la restricci ´on lineal  *a i*=1

*niαi* =

0, para una soluci ´on ´unica del sistema de ecuaciones de m´ınimos cuadrados. En cualquiera de los dos modelos se establecen lo siguientes supuestos: Los errores son variables aleatorias que se distribuyen normales, independientes, de media cero y varianza constante *σ*2, es decir, *εijIID*

*∼ N*(0*, σ*2)*, ∀ i* = 1*,* 2*, . . . , a, j* = 1*,* 2*,...,ni*. Los

par ´ametros a estimar son las constantes *μ*, *μi*, *αi* y *σ*2.

Note que si *ni* = *n, ∀ i* = 1*,* 2*,...,a*, entonces el modelo (3.2) queda de la siguiente manera,

*Yij* = *μ* + *αi* + *εij ,* sujeto a  *a i*=1

*αi* = 0*.* (3.3)

En la Tabla 3.2 se ilustra la tabulaci ´on de los datos experimentales. Para ejemplificar la aproximaci ´on por regresi ´on de los dos modelos DCA suponga un dise ˜no balanceado para un factor de tres niveles, con *ni* = *n* = 3*, ∀ i* = 1*,* 2*,* 3. Para el modelo en (3.1) definimos las variables indicadoras *Xk*, *k* = 1*,* 2*,* 3 as´ı:

*Xk* =

⎧⎪⎨

1 si el caso proviene del nivel *k* del factor ⎪⎩

0 c.c

60 Experimentos con un s ´olo factor de efectos fijos

Tabla 3.2: Tabla de datos experimentales de un DOE en un DCA

Niveles factor A

*A*1 *A*2 *... Aa*

*Y*11 *Y*21 *... Ya*1

a

s

o

ta

D

t

s

e

u

ps

e

r

*Y*12 *Y*22 *... Ya*2 ... ... ... ... *Y*1*n*1 *Y*2*n*2 *... Yana*

Total *Y*1*• Y*2*• ... Ya•*

Entonces el modelo de regresi ´on equivalente al modelo ANOVA (3.1) es

*Yij* = *μ*1*X*1*,ij* + *μ*2*X*2*,ij* + *μ*3*X*3*,ij* + *εij , εijIID*

*∼ N*(0*, σ*2)*, ∀ i* = 1*,* 2*,* 3 *j* = 1*,* 2*,* 3*,*

el cual corresponde a un MRLM sin intercepto y donde los coeficientes de regresi ´on son las medias *μi*. En forma matricial el sistema de ecuaciones resultante al evaluar el modelo en el conjunto de datos experimentales es de la forma Y = X*β* + *ε*, donde,

Y =

⎡

⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎣*Y*11

*Y*12

*Y*13

*Y*21

*Y*22

*Y*23

*Y*31

*Y*32

*Y*33

⎤

⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎦*,* X =

⎡

⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎣100

100 100 010 010 010 001 001 001

⎤

⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎦*, β* =⎡⎢⎢⎢⎣*μ*1

*μ*2

*μ*3

⎤

⎥⎥⎥⎦ *, ε* =

⎡

⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎣*ε*11

*ε*12

*ε*13

*ε*21

*ε*22

*ε*23

*ε*31

*ε*32

*ε*33

⎤

⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎦*.*

Para definir el modelo de regresi ´on equivalente al modelo ANOVA en (3.3), de nuevo

con *a* = 3 niveles y *ni* = 3, tenemos que considerar la restricci ´on  3 *i*=1

*αi* = 0, por tanto

podemos, escribir *α*3 = *−α*1 *− α*2 y definimos *a −* 1=2 variables explicatorias *Xk*, para

*k* = 1*,* 2, as´ı:

⎧⎪⎪⎪⎪⎨

*Xk* =

⎪⎪⎪⎪⎩

1 si el caso es del nivel k del factor *,*

*−*1 si el caso es del nivel 3 del factor 0 c.c